แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

7.1 ความนำ

7.2 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

7.3 ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้เกี่ยวกับออโตมาตาและองค์ประกอบที่สำคัญ
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็ปเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท

บทที่ 7

ออโตมาตาจำกัด

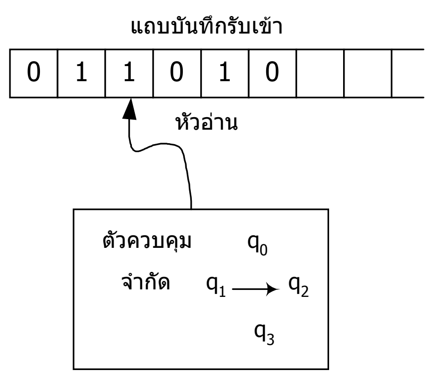
7.1 ความนำ

แบบจำลองที่สำคัญของการศึกษาทฤษฎีการคณนา (theory of computation) คือ ออโตมาตา ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ถูกนำมาใช้ในการแปลภาษาคอมพิวเตอร์ทั้งแบบคอมไพเลอร์และอินเทอร์พรีเตอร์ เนื่องจากรากฐานของคอมพิวเตอร์นั้นเป็นเครื่องยนต์สถานะจำกัด (finite-state machine) ในบทนี้จะมุ่งเน้นเรื่องออโตมาตาจำกัด (finite automata) ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับการทำงานของคอมพิวเตอร์เป็นสำคัญ เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเรื่องไวยากรณ์ (grammar) และการรู้จำภาษาต่อไป ออโตมาตาจำกัดเป็นแบบจำลองที่แต่ละเครื่องเป็นเครื่องที่มีเฉพาะหน่วยประมวลผลกลางซึ่งมีความจุของเรจิสเตอร์เป็นค่าถาวรตามการออกแบบตั้งแต่เริ่มต้น กับส่วนที่ทำหน้าที่นำข้อมูลเข้าเท่านั้น ไม่มีหน่วยความจำสำรอง ออโตมาตาจำกัดมี 2 แบบคือ ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (deterministic finite automata) กับออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด (non-deterministic finite automata) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.2 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (deterministic finite automata) เป็นการสร้างภาพแทนแต่ละเครื่องว่าเป็นอุปกรณ์อันหนึ่งที่สายอักขระรับเข้า (input string) ถูกส่งผ่านเข้ามาทางแถบบันทึกรับเข้า (input tape) ที่ถูกแบ่งออกเป็นช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยแต่ละช่องจะบันทึกสัญลักษณ์เพียงตัวเดียว ส่วนสำคัญของอุปกรณ์นี้คือส่วนที่เรียกว่าตัวควบคุมจำกัด (finite control) ที่ ณ ขณะหนึ่ง จะอยู่

ในสถานะหนึ่งจากเซตของสถานะทั้งหมดซึ่งเป็นเซตจำกัด ตัวควบคุมจำกัดนี้สามารถอ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนแถบบันทึกรับเข้าโดยใช้หัวอ่าน (reading head) โดยจะเริ่มอ่านจากสัญลักษณ์ตัวที่อยู่ซ้ายมือสุดของแถบบันทึกรับเข้า เริ่มจากสถานะเริ่มต้น (initial state) q_0 โดยที่ในการเคลื่อนที่ของหัวอ่านแต่ละครั้งออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเสมอ เช่น ในรูปที่ 7.1 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด อยู่ในสถานะ q_2 กำลังอ่านสัญลักษณ์ 1 เมื่ออ่านเสร็จหัวอ่านจะเคลื่อนไปทางขวา 1 ช่อง และออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดอาจจะเปลี่ยนสถานะ หรือคงอยู่ในสถานะเดิมขึ้นอยู่กับสถานะที่อยู่เดิมและสัญลักษณ์ที่เพิ่มอ่านเสร็จ ทำซ้ำอย่างนี้จนอ่านสายอักขระจบทั้งสาย เครื่องจะชี้ว่า "ยอมรับ" หรือ "ไม่ยอมรับ" โดยดูจากสถานะที่อยู่เมื่อการอ่านสัญลักษณ์ตัวสุดท้ายของสายอักขระเสร็จสิ้น โดยที่เครื่องจะชี้ว่า "ยอมรับ" สายอักขระนั้น ก็ต่อเมื่อสถานะที่อยู่ขณะนั้นเป็นสมาชิกตัวหนึ่งของกลุ่มที่เครื่องจัดไว้แต่แรกว่าเป็นกลุ่มของสถานะยอมรับ (accepting state)



รูปที่ 7.1 การอ่านแถบบันทึกจากหัวอ่าน

ที่มา(สุวิมล ฮอลล์), 2542, หน้า 20)

นิยามที่ 7.1 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดหรือเครื่องยนต์สถานะจำกัด แต่ละเครื่องประกอบด้วย

(1) เซตของสถานะทั้งหมดที่เป็นเซตจำกัด เขียนแทนเซตด้วย Q

(2) เซตของสัญลักษณ์รับเข้า (input symbol) ทั้งหมดซึ่งเป็นเซตจำกัด เขียนแทนเซตนี้ด้วย Σ

(3) สถานะเริ่มต้นซึ่งเป็นสมาชิกของ Q เขียนแทนสถานะนี้ด้วย q_0

(4) เซตของสถานะยอมรับทั้งหมดซึ่งเป็นเซตย่อยของ Q เขียนแทนเซตนี้ด้วย F

(5) ฟังก์ชัน δ จาก $Q \times \Sigma$ ไปยัง Q ฟังก์ชันนี้มีชื่อเรียกว่าฟังก์ชันการผ่าน (transition function) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

โดยทั่ว ๆ ไป จะเขียนแทนออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดแต่ละเครื่องด้วยสัญลักษณ์ $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

ตัวอย่างที่ 7.1 ให้ $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$ และ δ เป็นฟังก์ชันนิยามดังนี้

$\delta(q_0, a) = q_0$, $\delta(q_0, b) = q_1$, $\delta(q_1, a) = q_1$ และ $\delta(q_1, b) = q_0$

วิธีทำ จะได้ว่า $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด เครื่องหนึ่ง ดังรูปที่ 7.2

สัญลักษณ์รับเข้า / สถานะ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

รูปที่ 7.2 ค่าสถานะของการรับเข้า a กับ b ▌

สามารถบอกรายละเอียดทั้งหมดของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดของแต่ละเครื่อง โดยใช้แผนภาพที่มีชื่อเรียกว่า แผนภาพการผ่าน (transitive diagram) นิยามได้ดังนี้

นิยามที่ 7.2 แผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ แต่ละเครื่อง คือ กราฟระบุทิศทางที่

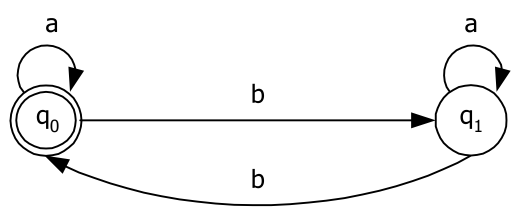
(1) มี Q เป็นเซตจุดยอดทั้งหมด และมีลูกศรชี้เข้าที่จุดยอด q_0

(2) มีวงกลม 2 วงล้อมรอบจุดยอดทุกจุดใน F และ

(3) จะมีเส้นเชื่อมจากจุดยอด p ไปยังจุดยอด q โดยมีสัญลักษณ์รับเข้า a เขียนกำกับก็ต่อเมื่อ $\delta(p, a) = q$

ตัวอย่างที่ 7.2 จงเขียนแผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ในตัวอย่างที่ 7.2

วิธีทำ แสดงแผนภาพการผ่านได้ดังรูปที่ 7.3



รูปที่ 7.3 ตัวอย่างแผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

นอกจากการใช้แผนภาพการผ่านบอกรายละเอียดทั้งหมดของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดแต่ละเครื่องแล้ว ยังสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แสดงภาพของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดที่กำลังอ่านสายอักขระรับเข้า ณ ขณะใด ๆ ได้ เนื่องจากหัวอ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดเคลื่อนไปทางขวาได้เพียงอย่างเดียว จึงสามารถตัดส่วนของสายอักขระรับเข้าที่เครื่องได้อ่านไปแล้วออกจากสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงภาพของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ที่กำลังอ่านสายอักขระรับเข้า ณ ขณะนั้นได้ สัญลักษณ์นี้มีชื่อเรียกว่า โครงแบบ (configuration) (Martin,1996, p.85) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

นิยามที่ 7.3 โครงแบบของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ คือคู่อันดับ $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ (ซึ่งมีความหมายว่าขณะนั้น M กำลังอยู่ในสถานะ q หัวอ่านอยู่ที่สัญลักษณ์ตัวแรกสุดทางซ้ายของ w และ w เป็นส่วนที่เหลือของสายอักขระรับเข้าที่เครื่องยังไม่ได้อ่าน) เช่น ในรูปที่ 7.1 $(q_2, 1010)$ เป็นโครงแบบของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดในขณะนั้น

จะกล่าวว่า (q, w) เป็นโครงแบบถัดจาก (p, x) เขียนแทนด้วย $(p, x) \vdash (q, w)$ ก็ต่อเมื่อ x=aw โดยที่ $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ และ $\delta(p,a) = q$

(q, w) เป็นโครงแบบที่ได้มาจาก (p, x) เขียนแทนด้วย $(p, x) \vdash^* (q, w)$ ก็ต่อเมื่อ (p, x) = (q, w) หรือมีโครงแบบ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ทำให้ $c_1 = (p, x)$, $c_1 \vdash c_2$, $c_2 \vdash c_3, \ldots, c_{n-1} \vdash c_n$ และ $c_n = (q, w)$

M ยอมรับ สายอักขระรับเข้า w ก็ต่อเมื่อ มี $q \in F$ ที่ทำให้ $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ ในกรณีนี้เรียก (q, ε) ว่าเป็นโครงแบบยอมรับ (accepting configuration)

และ ภาษาที่ M ยอมรับ เขียนแทนด้วย L(M) คือ $\{w \in \Sigma^* \mid M \text{ ยอมรับ } w\}$ ดังนั้น ภาษา L ใด ๆ จะเป็นภาษาที่ M ยอมรับ ก็ต่อเมื่อ L = L(M)

หมายเหตุ สำหรับสัญลักษณ์ $\vdash$ และ $\vdash^*$ ในกรณีที่มีออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดหลายเครื่อง เพื่อความชัดเจนจะใช้สัญลักษณ์ $\vdash_M$ และ $\vdash_M^*$ เมื่อจะกล่าวถึงโครงแบบถัดจาก และโครงแบบที่ได้มาจากเครื่อง M

ตัวอย่างที่ 7.3 ให้ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ในตัวอย่างที่ 7.1 จงตรวจสอบว่า M ยอมรับสายอักขระ aabba และ abbba หรือไม่

วิธีทำ สำหรับสายอักขระ aabba :

$(q_0, aabba) \vdash (q_0, abba)$ เนื่องจาก $\delta(q_0, a) = q_0$

$\vdash (q_0, bba)$ เนื่องจาก $\delta(q_0, a) = q_0$

$\vdash (q_0, ba)$ เนื่องจาก $\delta(q_0, b) = q_1$

$\vdash (q_0, a)$ เนื่องจาก $\delta(q_1, b) = q_0$

$\vdash (q_0, \varepsilon)$ เนื่องจาก $\delta(q_0, a) = q_0$

ดังนั้น $(q_0, aabba) \overset{*}{\vdash} (q_0, \varepsilon)$ และเนื่องจาก $q_0 \in F$

∴ จึงสรุปได้ว่า M ยอมรับ aabba

สำหรับสายอักขระ abbba :

$(q_0, abbba) \vdash (q_0, bbba)$

$\vdash (q_1, bba)$

$\vdash (q_0, ba)$

$\vdash (q_1, a)$

$\vdash (q_1, \varepsilon)$

ดังนั้น $(q_0, abbba) \overset{*}{\vdash} (q_1, \varepsilon)$ และเนื่องจาก $q_0 \notin F$

∴ จึงสรุปได้ว่า M ไม่ยอมรับ abbba ▮

ตัวอย่างที่ 7.4 ของเด็กเล่นชิ้นหนึ่งประกอบด้วย จอภาพ และแป้นพิมพ์ที่มีแป้นเพียง 2 แป้น โดยมีเลข 0 บนแป้นหนึ่ง และเลข 1 บนอีกแป้นหนึ่ง โดยที่เมื่อกดปุ่มเปิดจอภาพจะปรากฏนินจายืนนิ่ง ๆ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจายืนนิ่ง ๆ และเด็กกดแป้นเลข 0 รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจาพ่นไฟ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจายืนนิ่ง ๆ และเด็กกดแป้นเลข 1รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจาพ่นน้ำ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจาพ่นไฟและเด็กกดแป้นเลข 0 รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจายืนนิ่ง ๆ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจาพ่นน้ำและเด็กกดแป้นเลข 1 รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจายืนนิ่ง ๆ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจาพ่นไฟและเด็กกดแป้นเลข 1 รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจาพ่นน้ำ

ถ้าจอภาพมีรูปนินจาพ่นน้ำและเด็กกดแป้นเลข 0 รูปจะเปลี่ยนเป็นนินจาพ่นไฟ

จงเขียนแผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ที่เป็นตัวแบบของของเด็กเล่นชิ้นนี้ โดยระบุให้ชัดเจนว่าสถานะเริ่มต้น และสถานะอื่น ๆ เกี่ยวข้องกับ

ของเด็กเล่นชิ้นนี้ ถ้ากำหนดว่าสถานะยอมรับ คือ สถานะที่บนจอภาพปรากฏรูป นินจายืนนิ่ง

วิธีทำ ให้ q_0 เป็นสถานะที่จอภาพปรากฏรูปนินจายืนนิ่ง ๆ

ให้ q_1 เป็นสถานะที่จอภาพปรากฏรูปนินจาพ่นไฟ

ให้ q_2 เป็นสถานะที่จอภาพปรากฏรูปนินจาพ่นน้ำ

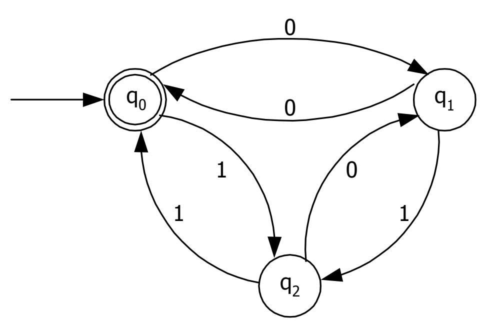
และ $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$, $F = \{ q_0 \}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ และ

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ นิยามได้ดังนี้

$\delta(q_0,0) = q_1$, $\delta(q_0,1) = q_2$, $\delta(q_1,0) = q_0$,

$\delta(q_1,1) = q_2$, $\delta(q_2,0) = q_1$, $\delta(q_2,1) = q_0$

แผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เครื่องนี้ดังรูปที่ 7.4 ∎



รูปที่ 7.4 แผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดของสถานะนินจา

ตัวอย่างที่ 7.5 จงสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด M ที่ยอมรับเฉพาะสายอักขระ $x \in \{0,1\}^*$ ที่มี 0 ปรากฏอยู่ทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ครั้ง และ 1 ปรากฏอยู่ทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ครั้ง

วิธีทำ ให้ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดที่มี

$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$ โดยที่

q_0 แทนสถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วจำนวนคู่ตัวและอ่าน 1 ไปแล้วจำนวนคู่ตัว

q_1 แทนสถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วจำนวนคี่ตัวและอ่าน 1 ไปแล้วจำนวนคี่ตัว

q_2 แทนสถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วจำนวนคู่ตัวและอ่าน 1 ไปแล้วจำนวนคู่ตัว

q_3 แทนสถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วจำนวนคี่ตัวและอ่าน 1 ไปแล้วจำนวนคี่ตัว

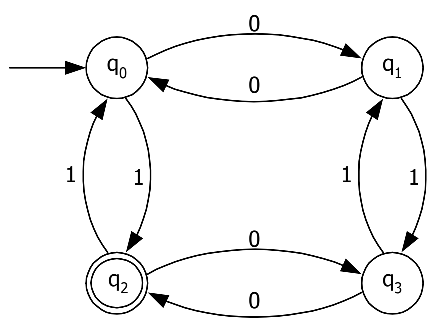
$F = \{ q_2 \}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ และ $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ นิยามได้ดังนี้

$\delta(q_0,0) = q_1$, $\delta(q_0,1) = q_2$, $\delta(q_1,0) = q_0$, $\delta(q_1,1) = q_3$,

$\delta(q_2,0) = q_3$, $\delta(q_2,1) = q_0$, $\delta(q_3,0) = q_2$, $\delta(q_3,1) = q_1$

แผนภาพการผ่านของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด เครื่องนี้ ดังรูปที่ 7.5

ความหมายของ ทำให้เห็นได้โดยง่ายว่า เครื่องนี้ยอมรับสายอักขระ ที่มี 0 ปรากฏอยู่ทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ครั้ง และ 1 ปรากฏอยู่ทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ครั้ง ▮



รูปที่ 7.5 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดของเครื่องรับสายอักขระ

7.3 ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด

ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด (non-deterministic finite automata) มี 2 ชนิดด้วยกัน คือ ชนิดที่ไม่อนุญาตให้มีการผ่านสถานะเมื่ออ่าน ε ซึ่งเรียกสั้น ๆ ว่า เอ็นเอฟเอ (NFA) กับชนิดที่อนุญาตให้มีการผ่านสถานะเมื่ออ่าน ε ซึ่งเรียกสั้น ๆ ว่า เอ็นเอฟเอที่มีการย้ายแทนด้วย -ε (NFA w/ε -moves)

แนวความคิดของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดซับซ้อนกว่าของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด และเข้าใจได้ยากกว่าของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดด้วย แต่ข้อดีของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดคือ ช่วยให้การพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เกี่ยวกับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดง่ายขึ้น อีกทั้งการสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่ยอมรับภาษาที่กำหนดให้ โดยมากจะกระทำได้ง่ายกว่าการสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด และหากสนใจกลุ่มของภาษาที่ยอมรับโดยออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดกับกลุ่มของภาษาที่ยอมรับโดยออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด จะพบว่ากลุ่มสองกลุ่มนี้เป็นกลุ่มเดียวกัน ดังนั้นในแง่ของการเป็นเครื่องยอมรับภาษา (language accepter) ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด และออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดทั้งสองชนิด มีขีดความสามารถเท่ากัน

นิยามที่ 7.4 เอ็นเอเอ (NFA) แต่ละเครื่องประกอบด้วยเซต Q, Σ, F และสถานะเริ่มต้น q_0 เช่นเดียวกับในนิยามที่ 7.1 แต่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันจาก Q x Σ ไปยังเซตกำลัง (power set) ของ Q

โดยทั่ว ๆ ไปนิยมเขียนแทนเอ็นเอฟเอแต่ละเครื่องด้วยสัญลักษณ์ $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ โดยที่ Q และ Σ เป็นเซตจำกัด $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ และ $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ เมื่อ P(Q) แทนเซตกำลังของ Q

นิยามที่ 7.5 แผนภาพการผ่าน (transitive diagram) ของเอ็นเอฟเอ $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ แต่ละเครื่อง คือ กราฟระบุทิศทางที่

(1) มี Q เป็นเซตของจุดยอดทั้งหมด และมีลูกศรชี้เข้าที่จุดยอด q_0

(2) มีวงกลม 2 วงล้อมรอบจุดยอดทุกจุดใน F

(3) จะมีเส้นเชื่อมจากจุดยอด p ไปยังจุดยอด q โดยมีสัญลักษณ์รับเข้า a เขียนกำกับ ก็ต่อเมื่อ $q \in \delta(p, a)$

นิยามที่ 7.6 โครงแบบ (configuration) ของเอ็นเอฟเอ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ คือคู่อันดับ $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ (ซึ่งมีความหมายว่า ขณะนั้น M กำลังอยู่ในสถานะ q หัวอ่านอยู่ที่สัญลักษณ์ตัวแรกสุดทางซ้ายของ w และ w เป็นส่วนที่เหลือของสายอักขระรับเข้าที่เครื่องยังไม่ได้อ่าน)

จะกล่าวได้ว่า (q,w) เป็นโครงแบบโครงหนึ่งที่ถัดจาก (p, x) เขียนแทนด้วย $(p, x) \vdash (q, w)$ ก็ต่อเมื่อ $x = aw$ โดยที่ $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ และ $q \in \delta(p, a)$

หมายเหตุ โครงแบบที่ถัดจาก (p, x) อาจมีได้มากกว่าหนึ่งโครงแบบในขณะที่ของออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด มีได้เพียงโครงแบบเดียว

(q, w) เป็นโครงแบบหนึ่งที่ได้มาจาก (p, x) เขียนแทนด้วย $(p, x) \vdash^* (q, w)$ ก็ต่อเมื่อ $(p, x) = (q, w)$ หรือมีโครงแบบ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ทำให้ $c_1 = (p, x)$, $c_1 \vdash c_2$, $c_2 \vdash c_3, \ldots, c_{n-1} \vdash c_n$ และ $c_n = (q, w)$

M ยอมรับ สายอักขระรับเข้า w ก็ต่อเมื่อ มี $q \in F$ ที่ทำให้ $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ ในกรณีนี้เรียก (q, ε) ว่าเป็นโครงแบบยอมรับ (accepting configuration)

และ ภาษาที่ M ยอมรับ เขียนแทนด้วย $L(M)$ คือ $\{w \in \Sigma^* \mid M \text{ ยอมรับ } w\}$ ดังนั้น ภาษา L ใด ๆ จะเป็นภาษาที่ M ยอมรับ ก็ต่อเมื่อ $L = L(M)$

หมายเหตุ สำหรับสัญลักษณ์ $\vdash$ และ $\vdash^*$ ในกรณีที่มีออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด หลายเครื่อง เพื่อความชัดเจนจะใช้สัญลักษณ์ $\vdash_M$ และ $\vdash_M^*$ เมื่อจะกล่าวถึงโครงแบบถัดจาก และโครงแบบที่ได้มาจากเครื่อง M

ตัวอย่างที่ 7.6 ให้ M = $(Q,\Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ที่มี Q =$\{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, F = $\{ q_0\}$ และฟังก์ชันการผ่าน δ นิยามดังนี้

$\delta(q_0, a) = \{ q_0, q_2\}$, $\delta(q_0, b) = \{ q_1 , q_2\}$

$\delta(q_1, b) = \{ q_2 \}$, $\delta(q_1, b) = \{ q_0 \}$

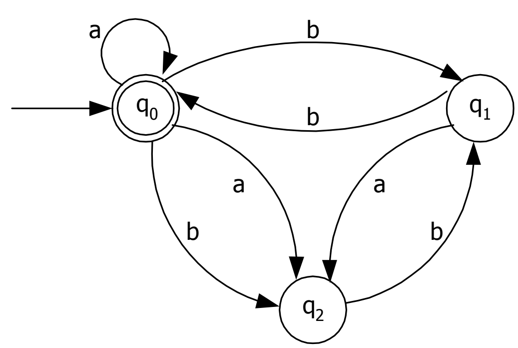
$\delta(q_0, a) = \varnothing$ และ $\delta(q_2, b) = \{ q_1 \}$

จงเขียนแผนภาพการผ่านของ M และตรวจสอบว่า M ยอมรับสายอักขระ aabba และ aab หรือไม่

วิธีทำ สำหรับสายอักขระ aabba : เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
(q_0, aabba) &\vdash (q_0, abba)\\
&\vdash (q_0, bba)\\
&\vdash (q_1, ba)\\
&\vdash (q_0, a)\\
&\vdash (q_0, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(q_0, aabba) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$ และจาก $q_0 \in F$ จึงได้ว่า M ยอมรับ aabba ดังรูปที่ 7.6 ▌



รูปที่ 7.6 แผนภาพการผ่านของ M

แต่สำหรับสายอักขระ aab พบว่า

(q_0, aab)

$\vdash$

(q_0, ab) หรือ (q_2, ab)

$\vdash$

(q_0, b) หรือ (q_2, b)

$\vdash$ $\vdash$

(q_0, ε) หรือ (q_2, ε) (q_1, ε)

ดังนั้น $(q_0, aab) \vdash^* (q_1, \varepsilon)$ หรือ $(q_0, aab) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$ เท่านั้น แต่ทั้ง q_1 , q_2 ต่างก็ไม่เป็นสมาชิกของ F จึงสรุปได้ว่า M ไม่ยอมรับ aab ดังรูปที่ 7.7 ▌

สัญลักษณ์รับเข้า / สถานะ	a	b
q_0	$\{q_0,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_1\}$

รูปที่ 7.7 ค่าการตรวจสอบการยอมรับสายอักขระ

ข้อสังเกต การตรวจสอบว่า เอ็นเอฟเอ M ยอมรับสายอักขระ w ที่กำหนดให้หรือไม่ โดยใช้นิยามที่ 7.6 ในกรณีที่พบ $q \in F$ ที่ $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ สรุปได้ทันทีว่า M ยอมรับ w ดังเช่น M ยอมรับ aabba ในตัวอย่างที่ 7.6 ข้างต้น แต่ถ้ายังหา (q, ε) ที่ $(q_0, w) \vdash (q, \varepsilon)$ โดยที่ $q \in F$ ไม่พบ ยังตอบไม่ได้ว่า M ไม่ยอมรับ w จนกว่าจะแสดงให้เห็นจริงว่าทุก (q, ε) ที่ $(q_0, w) \vdash (q, \varepsilon)$, q^* เหล่านั้นไม่เป็นสมาชิกของ F ซึ่งในกรณีนี้ ถ้า

ฟังก์ชัน δ มีทางเลือกหลายทาง การตรวจสอบโดยวิธีนี้จะยุ่งยาก และอาจพลาดบางกรณีได้

เนื่องจาก M ยอมรับ w หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับสถานะสุดท้ายที่ M เข้าไปอยู่ เมื่อจบการอ่าน w ทั้งสายแล้ว วิธีการตรวจสอบว่า M ยอมรับ w หรือไม่อีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กัน คือ ติดตามสถานะทั้งหมดที่ M อาจจะผ่าน เมื่ออ่าน w เช่น ในตัวอย่างที่ 7.6 M อ่าน aab

<u>อ่าน a ตัวแรก</u> M อยู่ในสถานะ q_0 เมื่ออ่านเสร็จได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่คือ

$\{ q_0, q_2 \}$ ....(1)

<u>อ่าน a ตัวถัดไป</u> ถ้า M อยู่ในสถานะ q_0 เมื่ออ่าน a ตัวนี้เสร็จ จะได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่คือ $\{ q_0, q_2 \}$

แต่ถ้า M อยู่ในสถานะ q_2 เมื่ออ่าน a ตัวนี้จะไม่มีสถานะอยู่ เนื่องจาก $\delta (q_0, a) = \varnothing$ ดังนั้นเซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่คือ $\varnothing$

สรุปได้ว่า เมื่ออ่าน a ตัวนี้เสร็จ จะได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่ได้คือ $\{ q_0, q_2 \} \cup \varnothing = \{ q_0, q_1\}$..(2)

<u>อ่าน b ตัวสุดท้าย</u> ถ้า M อยู่ในสถานะ q_0 เมื่ออ่าน b เสร็จ จะได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่ คือ $\{ q_1, q_2\}$

แต่ถ้า M อยู่ในสถานะ q_2 เมื่ออ่าน b เสร็จ จะได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่ คือ $\{ q_1 \}$

สรุปได้ว่า เมื่ออ่านตัวสุดท้ายนี้เสร็จ จะได้เซตของสถานะที่ M สามารถเข้าไปอยู่ได้คือ $\{ q_1, q_2 \} \cup \{ q_1 \} = \{ q_1, q_2 \}$ ....(3)

โปรดสังเกต ว่า $\{ q_1, q_2 \} \cup F = \{ q_1, q_2 \} \cap \{ q_0 \} = \varnothing$

ทั้งหมดที่กล่าวนี้เปรียบได้กับการขยายฟังก์ชันการผ่าน δ ไปสู่ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $Q \times \Sigma^*$ ซึ่งถ้าให้ชื่อฟังก์ชันใหม่ว่า $\hat{\delta}$ จะได้ว่า

(1) คือ $\hat{\delta}(q_0, a) = \{q_0, q_2\}$

(2) คือ $\hat{\delta}(q_0, aa) = \{q_1, q_2\}$

(3) $\hat{\delta}(q_0, aab) = \{q_1, q_2\}$

ซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปว่า M ไม่ยอมรับ aab เพราะว่า $\hat{\delta}(q_0, a) \cap F = \emptyset$ สามารถให้นิยามการขยายฟังก์ชัน δ ไปสู่ฟังก์ชัน $\hat{\delta}$ ได้ดังนี้

นิยามที่ 7.7 การขยายฟังก์ชันการผ่านไปสู่ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็น $Q \times \Sigma^*$

ให้ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นเอ็นเอฟเอเครื่องใด ๆ เครื่องหนึ่ง นิยามฟังก์ชัน: $\hat{\delta}$: $Q \times \Sigma^* \rightarrow P(Q)$ ดังนี้

(1) สำหรับแต่ละ $q \in Q$ ให้ $\hat{\delta}\{q, \varepsilon\} = \{q\}$

(2) สำหรับแต่ละ $q \in Q$ แต่ละ $w \in \Sigma^*$ และแต่ละ $a \in \Sigma$

ถ้า $\hat{\delta}(q, w) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

แล้วจะกำหนดค่าให้ $\hat{\delta}(q, w) = \delta(p_1, a) \cup \delta(p_2, a) \cup \ldots \cup \delta(p_n, a)$

และจะกล่าวว่า M ยอมรับ w ก็ต่อเมื่อ $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$

ข้อสังเกต สำหรับแต่ละ $a \in \Sigma$ เนื่องจาก $a = \varepsilon a$ จึงได้ว่า $\hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(q, \varepsilon a) = \hat{\delta}(q, a)$ ทุกสถานะ $q \in Q$ จึงใช้ δ ตัวเดิมแทนที่จะเป็น $\hat{\delta}$ นอกจากนี้ยังสามารถขยายฟังก์ชัน δ ไปสู่ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $P(Q) \times \Sigma^*$ ดังนี้ สำหรับทุกเซต $S \subseteq Q$ และสำหรับทุก $w \in \Sigma^*$ นิยามได้เป็น

$$\delta(S, w) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, w)$$

($\bigcup_{q \in S} \delta(q, w)$ หมายถึง ผลผนวกของ $\delta(S, w)$ ทุก $q \in S$ เช่น ถ้า

$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $\bigcup_{q \in S} \delta(q, w) = \delta(p_1, w) \cup \delta(p_2, w) \cup \ldots \cup \delta(p_n, w)$)

หมายเหตุ นิยามของ M ยอมรับ w ในนิยามที่ 7.6 กับในนิยามที่ 7.7 สมมูลกัน

วิเคราะห์ เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $w \in \Sigma^*$

$q \in \hat{\delta}(q_0, w)$ ก็ต่อเมื่อ $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$

ให้ $w \in \Sigma^*$ จะพิสูจน์ว่า

(1) ถ้า $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$ แล้ว $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$

(2) ถ้า $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ แล้ว $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$

พิสูจน์ (1) จะใช้อุปนัยเข้ม |w| (ความยาวของ w)

<u>มูลฐานการอุปนัย</u> : $|w| = 0$

ดังนั้น $w = \varepsilon$ ทำให้ได้ว่า ถ้า $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$ แล้ว $q = q_0$

และ $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$

<u>สมมติฐานการอุปนัย</u> :

สมมติว่า $|w| > 0$ และสำหรับทุก $x \in \Sigma^*$ ที่ $|x| < |w|$

ถ้า $p \in \hat{\delta}(q_0, x)$ แล้ว $(q_0, x) \vdash^* (p, \varepsilon)$

<u>ข้อความที่จะพิสูจน์</u> :

ถ้า $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$ แล้ว $(q_0, w) \vdash^* (p, \varepsilon)$

สมมติ $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$ และจาก $|w| > 0$ จะได้ว่า $w = xa$ สำหรับบาง $x \in \Sigma^*$ และ $a \in \Sigma$ ซึ่งส่งผลว่า $q \in \delta(p, a)$ สำหรับบาง $p \in \hat{\delta}(q_0, x)$

ฉะนั้น โดยสมมติฐานการอุปนัย จะได้ว่า $(q_0, x) \vdash^* (p, \varepsilon)$ ทำให้ได้ว่า

$(q_0, w) = (q_0, xa) \vdash^* (p, a) \vdash (q, \varepsilon)$

จบการพิสูจน์ (1)

พิสูจน์ (2) จะใช้อุปนัยเข้มบน $|w| = 0$

<u>มูลฐานการอุปนัย</u> :

ดังนั้น $w = \varepsilon$ ทำให้ได้ว่า ถ้า $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ แล้ว $q = q_0$ ซึ่ง ส่งผลว่า

$q \in \hat{\delta}(q_0, w)$

<u>สมมติฐานการอุปนัย</u> :

สมมติว่า $|w| > 0$ และสำหรับทุก $x \in \Sigma^*$ ที่ $|x| < |w|$

ถ้า $(q_0, x) \vdash^* (p, \varepsilon)$ แล้ว $p \in \hat{\delta}(q_0, x)$

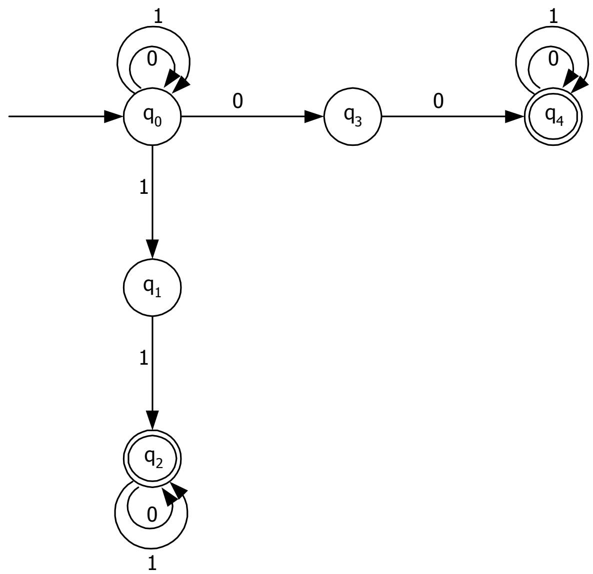
<u>ข้อความที่จะพิสูจน์</u> :

ถ้า $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ แล้ว $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$

สมมติว่า $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ และ จาก $|w| > 0$ จะได้ว่า $w = xa$ สำหรับบาง $x \in \Sigma^*$ และ $a \in \Sigma$ ซึ่งส่งผลว่า มี $p \in Q$ ทำให้ $(q_0, w) \vdash^* (p, a) \vdash (q, \varepsilon)$ ดังนั้น $(q_0, x) \vdash^* (p, \varepsilon)$ และ $q \in \delta(p, a)$ โดยสมมติฐานการอุปนัยจะได้ $p \in \hat{\delta}(q_0, x)$ กอรปกับนิยามของ $\hat{\delta}$ จึงสรุปได้ว่า $q \in \hat{\delta}(q_0, w)$

จบการพิสูจน์ (2)

ตัวอย่างที่ 7.7 ให้ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นเอ็นเอฟเอที่มีแผนภาพการผ่านดังรูปที่ 7.8



รูปที่ 7.8 แผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอ

จงตรวจสอบว่า M ยอมรับ w หรือไม่ โดยใช้นิยามที่ 7.7 เมื่อกำหนดว่า

(ก) w = 01001 (ข) w = 01010

วิธีทำ

(ก) ต้องการหา $\hat{\delta}\,(q_0, 01001)$

จาก $\hat{\delta}\,(q_0, 0) = \hat{\delta}\,(q_0, \varepsilon 0) = \delta(q_0, 0) = \{ q_0, q_3\}$ จะได้

$\hat{\delta}\,(q_0, 01) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_0, 1) = \{ q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{ q_0, q_1\}$,

$\hat{\delta}\,(q_0, 010) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 0) = \{ q_0, q_3\} \cup \varnothing = \{ q_0, q_3\}$,

$\hat{\delta}\,(q_0, 0100) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_3, 0) = \{ q_0, q_3\} \cup \{ q_4\} = \{ q_0, q_1 , q_4\}$

และ $\hat{\delta}\,(q_0, 01001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_4, 1) = \{ q_0, q_1\} \cup \varnothing \cup$

$\{ q_4\} = \{ q_0, q_1 , q_4\}$ พบว่า $\hat{\delta}\,(q_0, 01001) \cap F \neq \varnothing$

ดังนั้น M ยอมรับ 01001

(ข) ต้องการหา $\hat{\delta}(q_0, 01010)$

จาก $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_3\}$ จะได้

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_1\}$, $\hat{\delta}(q_0, 010) = \{q_0, q_3\}$

$\hat{\delta}(q_0, 0101) = \{q_0, q_1\}$ และ $\hat{\delta}(q_0, 01010) = \{q_0, q_3\}$

พบว่า $\hat{\delta}(q_0, 01010) \cap F = \varnothing$

ดังนั้น M ไม่ยอมรับ 01010 ∎

ตัวอย่างที่ 7.8 วิศวกรผู้หนึ่งสร้างหุ่นยนต์ที่มีสองมือไว้สำหรับจัดชุดถ้วยกาแฟในโรงอาหาร โดยหุ่นยนต์จะหยิบถ้วยหรือจานรอง ซึ่งส่งผ่านมาทางสายพานเรียงแถวทีละหนึ่งชิ้น โดยมีหลักการทำงานดังนี้

(1) ถ้ามือของหุ่นยนต์ว่างทั้งสองมือ หุ่นยนต์จะเริ่มหยิบภาชนะด้วยมือซ้าย (ภาชนะนั้นอาจจะเป็นถ้วยหรือจานรองก็ได้)

(2) ถ้ามือซ้ายถือภาชนะชิ้นหนึ่งอยู่ มือขวาจะหยิบภาชนะคนชะชนิดกับที่ถืออยู่ในมือซ้าย

(3) หุ่นยนต์จะต้องเอาถ้วยวางบนจานรอง และส่งออกทางสายพานอีกอันหนึ่ง

(4) เมื่อหมดแถวของภาชนะที่ส่งผ่านมาให้จัดชุดแล้ว มือทั้งสองของหุ่นยนต์ต้องไม่ถือภาชนะใดเลย

จงเขียนแผนภาพการผ่านจองเอ็นเอฟเอ M ที่เป็นตัวแบบของหุ่นยนต์ตัวนี้ โดยระบุให้ชัดเจนว่า สถานะเริ่มต้น และสถานะอื่น ๆ เกี่ยวข้องกับหุ่นยนต์ตัวนี้อย่างไร ถ้ากำหนดว่า สถานะยอมรับคือ สถานะที่มือทั้งสองของหุ่นยนต์ต้องไม่ถือภาชนะใดเลย

วิธีทำ ให้ q_0 แทนสถานะที่มือของหุ่นยนต์ว่างทั้งสองมือ

ให้ q_1 แทนสถานะที่มือซ้ายของหุ่นยนต์ถือจานรอง

ให้ q_2 แทนสถานะที่มือซ้ายของหุ่นยนต์ถือถ้วย

และ $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$, $F = \{ q_0 \}$, $\Sigma = \{ c, d \}$ เมื่อ c แทนถ้วย และ d แทนจานรอง และ $\hat{\delta} : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ นิยามได้ดังนี้

$\delta(q_0, c) = \{ q_2 \}$, $\delta(q_0, d) = \{ q_1 \}$, $\delta(q_1, c) = \{ q_0 \}$,

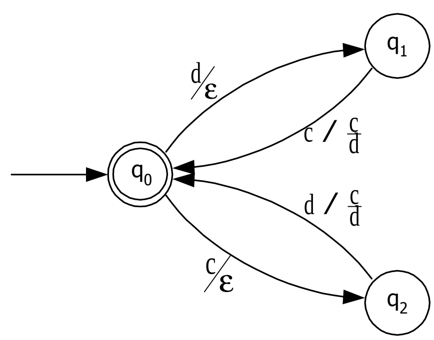
$\delta(q_1, d) = \varnothing$, $\delta(q_2, c) = \varnothing$, $\delta(q_0, d) = \{ q_0 \}$

แต่เนื่องจากว่า หุ่นยนต์ต้องเอาถ้วยวางบนจานรอง และส่งออกทางสายพานอีกอันหนึ่ง แสดงว่าเครื่องนี้มีข้อมูลออก ดังนั้นจึงต้องมีฟังก์ชันข้อมูลออก ให้ชื่อว่า η โดยที่ $\eta : Q \times \Sigma \rightarrow P(\Gamma)$ เมื่อ $\Gamma = \{ \frac{c}{d}, \varepsilon \}$ นิยามดังนี้

$\eta(q_0, c) = \{ \varepsilon \}$, $\eta(q_0, d) = \{ \varepsilon \}$, $\eta(q_1, c) = \{ \frac{c}{d} \}$,

$\eta(q_0, d) = \{ \varnothing \}$, $\eta(q_0, c) = \{ \varnothing \}$, $\eta(q_2, d) = \{ \frac{c}{d} \}$

สามารถเขียนแผนภาพการผ่านที่มีข้อมูลออกได้ดังรูปที่ 7.9 ▌



รูปที่ 7.9 แผนภาพการผ่านที่มีข้อมูลออก

ตัวอย่างที่ 7.9 จงสร้างเอ็นเอฟเอ M ที่ L(M) = L เมื่อ

$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x$ ต้องไม่มีเลข 0 เขียนเรียงติดกัน 3 ตัว$\}$

วิธีทำ ให้ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นเอ็นเอฟเอที่มี $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$,

$F = \{ q_0, q_1, q_2 \}$ โดยที่

q_0 แทนสถานะเริ่มต้น หรือสถานะที่เริ่มจบการอ่าน 1

q_1 แทนสถานะที่หลังจากอ่าน 1 ครั้งล่าสุด ได้อ่าน 0 ไปแล้ว 1 ครั้ง

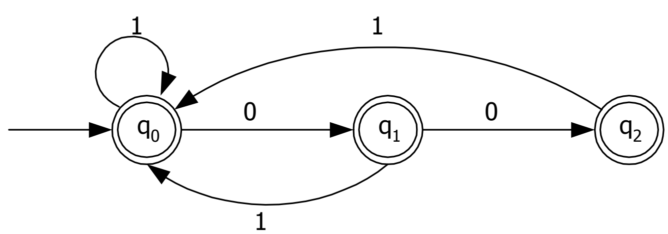
q_2 แทนสถานะที่หลังจากอ่าน 1 ครั้งล่าสุด ได้อ่าน 0 ไปแล้ว 2 ครั้ง

$\Sigma = \{0,1\}$ และ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ นิยามดังนี้

$\delta(q_0, 0) = \{q_1\}$, $\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$, $\delta(q_0, 0) = \{q_2\}$,

$\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$, $\delta(q_2, 0) = \varnothing$, $\delta(q_2, 1) = \{q_0\}$

แผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอเครื่องนี้แสดงดังรูปที่ 7.10 ∎



รูปที่ 7.10 แผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอ

ความหมายของ q_0, q_1, q_2 ทำให้เห็นได้โดยง่ายว่าเครื่องนี้ยอมรับเฉพาะสายอักขระ $x \in \{0, 1\}^*$ ที่ไม่มี 0 เขียนเรียงติดกันสามตัว

หมายเหตุ

(1) สามารถสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ที่เป็นตัวแบบของตัวอย่างที่ 7.6 และ 7.7 ได้ แต่การสร้างจะยุ่งยากกว่า เพราะว่านิยามของเอ็นเอฟเอ อนุญาตให้จำนวนเส้นเชื่อมที่ออกจากจุดยอด q ใด ๆ น้อยกว่าจำนวนของสัญลักษณ์รับเข้าได้ แต่สำหรับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด จุดยอมทุกจุดต้องมีเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดนั้นจำนวนเท่ากับจำนวนของสัญลักษณ์รับเข้า

(2) ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ทุกเครื่องสามารถพิจารณาว่าเอ็นเอฟเอได้

นิยามที่ 7.8 เอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε (NFA w/ε-moves) แต่ละเครื่องประกอบด้วยเซต Q, Σ, F และสถานะเริ่มต้น q_0 เช่นเดียวกับในนิยามที่ 7.1 แต่ฟังก์ชันการผ่าน δ เป็นฟังก์ชันจาก δ: Q x ($\Sigma \cup \{\varepsilon\}$) ไปยัง P(Q)

โดยทั่วไปจะเขียนแทน เอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε แต่ละเครื่องด้วยสัญลักษณ์ (Q, Σ, δ, q_0, F) โดยที่ Q และ Σ เป็นเซตจำกัด $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ และ $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Q)$

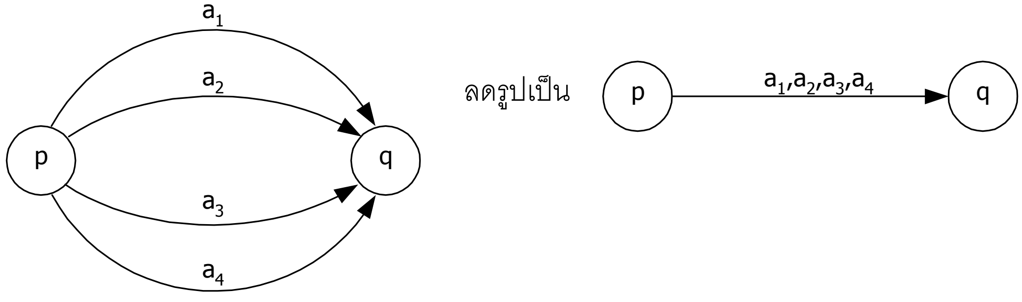
นิยามที่ 7.9 ให้ M = (Q, Σ, δ, q_0, F) เป็นเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε แผนภาพการผ่าน (transitive diagram) ของ M คือ กราฟระบุทิศทางที่

(1) มี Q เป็นเซตของจุดยอดทั้งหมด และมีลูกศรชี้เข้าที่จุดยอด q_0

(2) มีวงกลม 2 วง ล้อมรอบจุดยอดทุกจุดใน F

(3) จะมีเส้นเชื่อมจากจุดยอม p ไปยังจุดยอม q โดยมีสัญลักษณ์ a $\in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ เขียนกำกับ ก็ต่อเมื่อ $q \in \delta(p, a)$

การเขียนแผนภาพการผ่าน ในกรณีที่มีเส้นเชื่อมหลายเส้นออกจากจุดยอด p ไปยังจุดยอด q ถ้าเขียนครบทุกเส้น แผนภาพจะรุงรังและยากต่อการเข้าใจ ดังนั้นจึงขอลดรูปการเขียนเหลือเพียงเส้นเดียว แต่เขียนกำกับด้วยสัญลักษณ์ของทุกเส้น เช่น



รูปที่ 7.11 แผนภาพแสดงการลดรูป

ตัวอย่างที่ 7.10 ของเด็กเล่นชิ้นหนึ่งประกอบด้วย จอภาพและแป้นพิมพ์ ซึ่งมีลักษณ์ +, -, x, =, ?, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ปรากฏอยู่แป้นละหนึ่งตัว ของเด็กเล่นชิ้นนี้จะสอนเด็กเกี่ยวกับรูปแบบที่ถูกต้องของการบวก ลบ คูณ จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยมีกฎเกณฑ์ดังนี้

(1) จำนวนเต็มตั้งแต่สองหลักขึ้นไป ต้องไม่เริ่มต้นด้วย 0

(2) เครื่องหมาย +, -, x เขียนติดกันโดยไม่มีจำนวนเต็มคั่นไม่ได้

(3) สายอักขระแต่ละสายต้องเริ่มด้วยจำนวนเต็มเท่านั้น

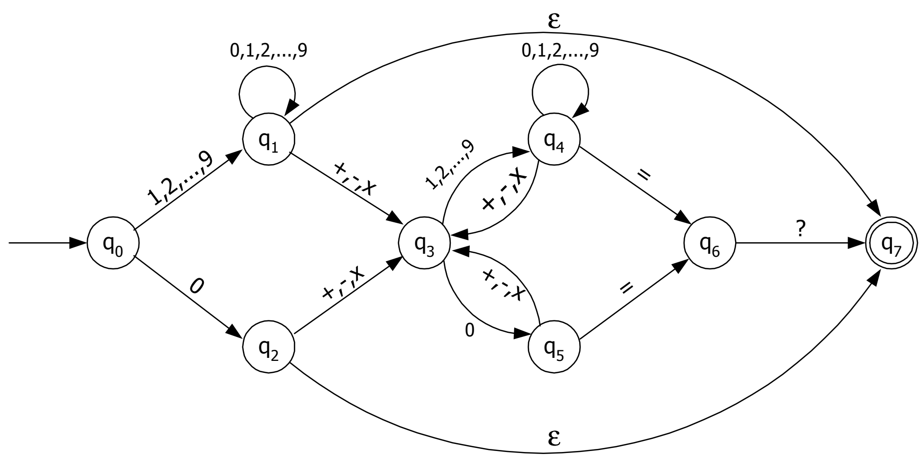
(4) เครื่องหมาย = ต้องอยู่ระหว่างจำนวนเต็ม กับเครื่องหมาย ? เท่านั้น

(5) ถ้ามีเครื่องหมาย +, -, x ปรากฏอยู่ในสายอักขระอย่างน้อย 1 เครื่องหมาย สายอักขระนั้นต้องลงท้ายด้วย =? เสมอ และสายอักขระย่อย =? ปรากฏได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น

(6) ถ้าไม่มีเครื่องหมาย +, -, x ปรากฏในสายอักขระเลย สายอักขระนั้นต้องไม่มีเครื่องหมาย = และต้องไม่มีเครื่องหมาย ? ปรากฏด้วยเช่นกัน

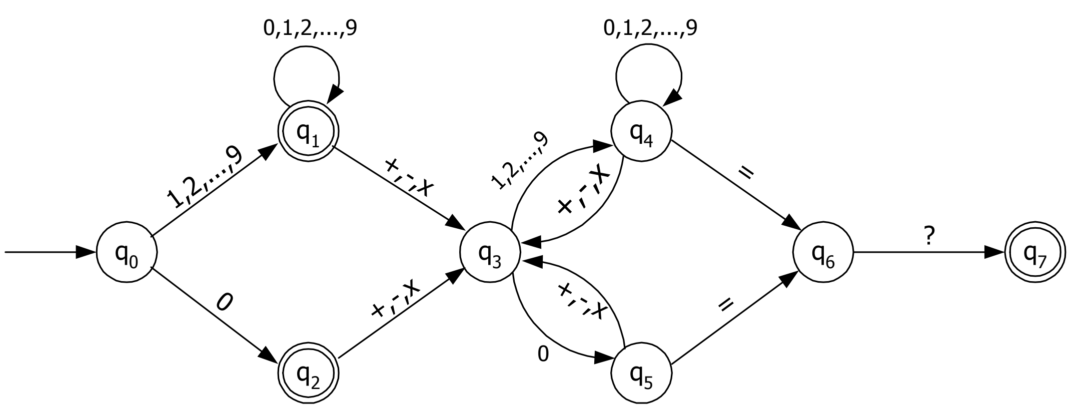
บนจอภาพจะมีปุ่ม 2 ปุ่ม ปุ่มบนสำหรับลบจอภาพ เมื่อพิมพ์สายอักขระแต่ละสายเสร็จแล้ว ให้กดปุ่มล่าง ถ้าสายอักขระที่พิมพ์เสร็จอยู่ในรูปแบบที่ถูกต้อง ของเด็กเล่นชิ้นนี้จะส่งเสียงว่า "ถูกต้อง" จงเขียนแผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε ที่เป็นตัวแบบของของเด็กเล่นชิ้นนี้ ถ้ากำหนดว่าสถานะยอมรับคือสถานะที่ของเด็กเล่นชิ้นนี้ส่งเสียงว่า "ถูกต้อง" และให้มีสถานะยอมรับได้เพียงสถานะเดียว

วิธีทำ แผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε เครื่องนี้แสดงได้ดังรูปที่ 7.12 ▮



รูปที่ 7.12 แผนภาพการผ่านของเอ็นเอฟเอที่มีการย้าย

หมายเหตุ ในตัวอย่างที่ 7.10 ถ้าโจทย์ไม่ได้ระบุว่า ต้องมีสถานะยอมรับเพียงสถานะเดียว สามารถสร้างเอ็นเอฟเอที่เป็นตัวแบบของเด็กเล่นชิ้นนี้ได้ดังรูปที่ 7.13



รูปที่ 7.13 เอ็นเอฟเอที่เป็นตัวแบบของเด็กเล่น

เนื่องจากสำหรับสายอักขระ $w \in \Sigma^*$ ใด ๆ $w = \varepsilon\underbrace{\varepsilon\varepsilon\ \varepsilon}_{\text{กี่ครั้งก็ได้}}\ldots\varepsilon w = w\underbrace{\varepsilon\varepsilon}_{\text{กี่ครั้งก็ได้}}\ldots\varepsilon$

ทำให้การให้นิยาม “โครงแบบถัดจาก” ในกรณีของเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε มีความยุ่งยากและไม่สะดวกในการนำไปใช้ตรวจสอบว่า เอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε ยอมรับสายอักขระที่กำหนดให้หรือไม่ ในที่นี้จะให้นิยามเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε ยอมรับสายอักขระ w โดยเลียนแบบนิยามที่ 7.7 ดังนี้

นิยามที่ 7.10 การขยายฟังก์ชันการผ่านไปสู่ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $Q \times \Sigma^*$

ให้ M= $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็นเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε เครื่องใด ๆ เครื่องหนึ่ง สำหรับสถานะ q ใด ๆ ε-โคลเชอร์ (ε-closure) ของ q เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ε-CL(q) หมายถึง $\{q\} \cup \{p \in Q|$ มีวิถีจาก q ไปยัง p โดยที่ทุกเส้นเชื่อมของวิถีนั้นมี ε เขียนกำกับอยู่$\}$ และสำหรับสับเซต S ใด ๆ ของ Q ε-โคลเชอร์ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ε-CL(S) หมายถึงผลผนวกของ ε–CL(q) ทุก $q \in S$

นิยาม $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow P(Q)$ โดยวิธีเรียกว่าการเวียนบังเกิดดังนี้

(1) สำหรับแต่ละ $q \in Q$ ให้ $\delta(q, \varepsilon) = \varepsilon$-CL(q)

(2) สำหรับแต่ละ $q \in Q$ แต่ละสายอักขระรับเข้า w และ
แต่ละสัญลักษณ์รับเข้า a
ถ้า $\hat{\delta}(q, w) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ แล้ว จะกำหนดค่าให้

$$\hat{\delta}(q, wa) = \varepsilon\text{-CL}(S) \quad \text{เมื่อ} \quad S = \bigcap_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$$

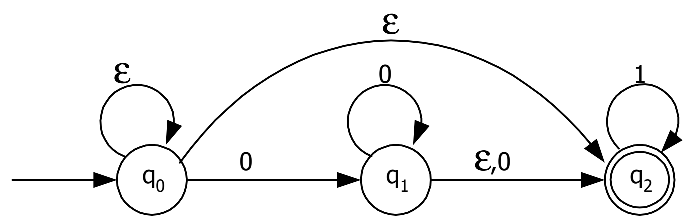
จะกล่าวว่า M ยอมรับ w ก็ต่อเมื่อ $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$ และภาษาที่ M ยอมรับ เขียนแทนด้วย L(M) คือ $\{w \in \Sigma^* |$ M ยอมรับ w$\}$

ตัวอย่างที่ 7.11 กำหนดแผนภาพการผ่านของ M ซึ่งเป็นเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายจากรูปที่ 7.14 โดยมี -ε ดังนี้

จงหา (1) ε-CL(q_0)

(2) $\hat{\delta}$ (q_0, 0) และ $\hat{\delta}$ (q_0, 01)

และ สรุปด้วยว่า M ยอมรับสายอักขระ 10 และ 01 หรือไม่



รูปที่ 7.14 แผนภาพการผ่านของ M ซึ่งเป็นเอ็นเอฟเอที่มีการย้าย

วิธีทำ

1. ε–CL(q_0) = { q_0} ∪ {q_0, q_2} = { q_0, q_2}
2. สำหรับ $\hat{\delta}$ (q_0,10) :

$\hat{\delta}$ (q_0, ε) = ε– CL(q_0) = {q_0, q_2}

$\hat{\delta}$ (q_0,1) = $\hat{\delta}$ (q_0, ε 1) = ε–CL(S_1)

เมื่อ S_1 = δ(q_0,1) ∪ δ

(q_2,1) = { q_2}

ดังนั้น $\hat{\delta}$ (q_0,1) = ε–CL(q_2) = { q_2}

และ $\hat{\delta}$ (q_0,10) = ε–CL(S_2) เมื่อ S_2 = δ(q_2,0) = ∅

ดังนั้น $\hat{\delta}$ (q_0,10) = ∅

จึงได้ว่า M ไม่ยอมรับ 10

สำหรับ $\hat{\delta}(q_0,01)$:

$\hat{\delta}(q_0,\varepsilon) = \varepsilon\text{–CL}(q_0) = \{q_0, q_2\}$

$\hat{\delta}(q_0,0) = \hat{\delta}(q_0,\varepsilon 0) = \varepsilon\text{–CL}(S_3)$ เมื่อ $S_3 = \delta(q_0,0) \cup \delta(q_2,0)$

$= \{ q_1\}$

ดังนั้น $\hat{\delta}(q_0,0) = \varepsilon\text{–CL}(q_1) = \{ q_1,q_2\}$

และ $\hat{\delta}(q_0,01) = \varepsilon\text{–CL}(S_4)$ เมื่อ $S_4 = \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1)= \{ q_2 \}$

ดังนั้น $\hat{\delta}(q_0,01) = \varepsilon\text{–CL}(q_2) = \{ q_2 \}$

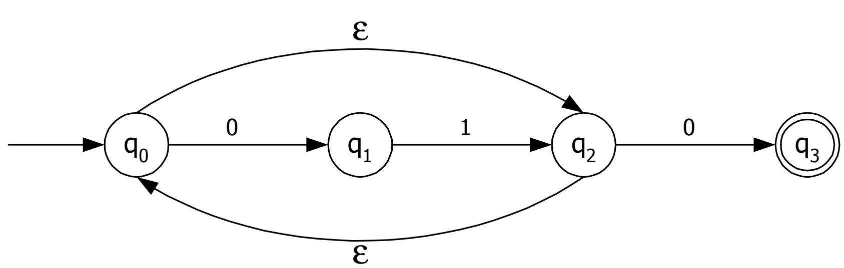
จึงได้ว่า $\hat{\delta}(q_0, 01) \cap F \neq \varnothing$

สรุปได้ว่า M ยอมรับ 01 ▌

ตัวอย่างที่ 7.12 จงสร้างเอ็นเอฟเอที่มีการย้ายโดย -ε M ที่มี L(M) = L เมื่อ L = $\{x \in \{0,1\}^* \mid$ มี n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $x = (01)^n0 \}$

(หมายเหตุ $(01)^n0$ หมายถึงสายอักขระ 01010101..010 โดยมี 01 ปรากฏทั้งหมด n ครั้ง)

วิธีทำ เนื่องจาก L = {0, 010, 01010, 0101010, …} และต้องการสร้าง M ที่ยอมรับเฉพาะสายอักขระที่เป็นสมาชิกของ L เท่านั้น จึงได้แผนภาพการผ่านของ M ดังรูปที่ 7.15 ▌



รูปที่ 7.15 แผนภาพการผ่านของ M

ทำการตรวจสอบด้วยว่า เครื่องนี้ยอมรับเฉพาะสายอักขระที่เป็นสมาชิกของ L เท่านั้น ดังนี้

$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_1, q_3\}$

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_2\}$ ซึ่งส่งผลว่า $\hat{\delta}(q_0, 010) = \{q_3\}$

$\hat{\delta}(q_0, 0101) = \{q_2\}$ ซึ่งส่งผลว่า $\hat{\delta}(q_0, 01010) = \{q_3\}$

…

ดังนั้น โดยทั่ว ๆ ไปจะได้ $\hat{\delta}(q_0, (01)^n0) = \{q_3\}$ ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$ นั่นคือ M ยอมรับทุกสายอักขระที่เป็นสมาชิกของ L ซึ่งตรงกับข้อความ $L \subseteq L(M)$

ต่อไปจะแสดงว่า $L(M) \subseteq L$ โดยให้ $w \in L(M)$ เป็นสมาชิกใด ๆ และจะพิสูจน์ว่า $w \in L$

จาก $w \in L(M)$ จะได้ $q_3 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ และเนื่องจาก $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0, q_2\}$ จึงได้ว่า $w \neq \varepsilon$ ดังนั้น $w = xa$ สำหรับบาง $x \in \{0,1\}^*$ และ $a \in \{0,1\}$

จากแผนภาพการผ่านรูปที่ 7.15 พบว่า

(1) สถานะ q_2 เป็นสถานะเดียวเท่านั้นที่มีตัวเชื่อมไปยังสถานะ q_3 และตัวเชื่อมนั้นมี 0 เขียนกำกับอยู่ จึงสรุปได้ว่า $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, x)$ และ $a = 0$ และ

(2) เฉพาะสายอักขระที่อยู่ในรูปแบบ $(01)^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}_0$ เท่านั้น ที่เมื่อเริ่มจากอ่าน q_0 สายอักขระนั้น แล้วจะไปจบลงที่ q_2 ได้

ดังนั้น $x = (01)^n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}_0$ จึงสรุปได้ว่า $w = xa = (01)^n0$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}_0$ นั่นคือ $w \in L$

7.4 สรุป

ออโตมาตาจำกัดหรือเครื่องยนต์สถานะจำกัด เป็นแบบจำลองที่ถูกนำมาวิเคราะห์การทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ทั้งในด้านฮาร์ดแวร์และซอร์ฟแวร์ ใช้ในการแปลภาษาคอมพิวเตอร์ทั้งแบบคอมไพเลอร์และอินเทอร์พรีเตอร์ เพื่อตรวจสอบการยอมรับได้ของการทำงานหนึ่ง ๆ ออโตมาตาจำกัดมีองค์ประกอบที่สำคัญคือต้องประกอบด้วยเซตของสถานะทั้งหมดที่จำกัด เซตของสัญลักษณ์นำเข้าที่จำกัด สถานะเริ่มต้น เซตของการยอมรับได้ทั้งหมด และฟังก์ชันผ่านการทำงาน ออโตมาตาจำกัด มี 2 แบบคือ ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด กับ ออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนด ทั้ง 2 แบบแตกต่างกันที่แนวคิดของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดซับซ้อนกว่าและเข้าใจได้ยากกว่าออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด แต่ข้อดีของออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดคือ ช่วยให้การพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เกี่ยวกับออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนดง่ายขึ้น อีกทั้งการสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงไม่กำหนดที่ยอมรับภาษาที่กำหนดให้ โดยมากจะกระทำได้ง่ายกว่าการสร้างออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

7.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ของเด็กเล่นชิ้นหนึ่งประกอบด้วย จอภาพและแป้นพิมพ์ ซึ่งมีลักษณ์ +, -, x , ÷ , = , ?, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ปรากฏแป้นละหนึ่งตัว ของเด็กเล่นชิ้นนี้จะสอนเกี่ยวกับรูปแบบที่ถูกต้องของการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบโดยมีกฎเกณฑ์ดังนี้

   (1) จำนวนเต็มที่ต่อท้ายเครื่องหมาย ÷ ต้องไม่เป็น 0

   (2) จำนวนเต็มตั้งแต่สองหลักขึ้นไป ต้องไม่เริ่มต้นด้วย 0

   (3) เครื่องหมาย +, -, x , ÷ เขียนติดกันโดยไม่มีจำนวนเต็มคั่นไม่ได้

   (4) สายอักขระแต่ละสายต้องเริ่มด้วยจำนวนเต็มเท่านั้น

   (5) เครื่องหมาย = ต้องอยู่ระหว่างจำนวนเต็ม กับเครื่องหมาย ? เท่านั้น

   (6) ถ้ามีเครื่องหมาย +, -, x , ÷ ปรากฏอยู่ในสายอักขระอย่างน้อย 1 เครื่อง-หมาย สายอักขระนั้นต้องลงท้ายด้วย = ? เสมอ และเครื่องหมาย = ? ปรากฏเพียงครั้งเดียวเท่านั้น

   (7) ถ้าไม่มีเครื่องหมาย +, -, x , ÷ ปรากฏอยู่ในสายอักขระเลย สายอักขระนั้นต้องไม่มีเครื่องหมาย = ? และต้องไม่มีเครื่องหมาย ? ปรากฏด้วยเช่นกัน

   โดยบนจอภาพจะมีปุ่ม 2 ปุ่ม ปุ่มบนสำหรับลบจอภาพ เมื่อพิมพ์สายอักขระแต่ละสายเสร็จแล้วต้องกดปุ่มล่าง ถ้าสายอักขระที่พิมพ์อยู่ในรูปแบบที่ถูกต้อง ของเด็กเล่นชิ้นนี้จะส่งเสียงว่า “ถูกต้อง” จงเขียนแผนภาพการผ่านของเอฟเอที่เป็นตัวแบบของของเด็กเล่นชิ้นนี้ ถ้ากำหนดว่าสถานะยอมรับคือ สถานะที่ของเด็กเล่นชิ้นนี้ส่งเสียงว่า “ถูกต้อง”

2. รายการเกมโชว์รายการหนึ่ง ผู้เล่นต้องเล่นตามกติกาดังนี้

   ผู้เล่นหยิบไพ่ 2 ใบ โดยหยิบทีละใบจากไพ่ทั้งหมด 5 ใบ แต่ละใบมีเลข 0, 1, 2, 3, 4 เขียนกำกับอยู่ใบละหนึ่งตัวเท่านั้น เมื่อผู้เล่นหงายไพ่ที่หยิบขึ้นมา จะอ่านเป็นฐาน 5 (เช่น ถ้าหยิบได้ 1,3 พิธีกรจะอ่านเป็น 13_5 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1x5+3 ในเลขฐาน 10)

   ผู้เล่นจะได้รับรางวัล ก็ต่อเมื่อ เลขฐาน 5 ที่ได้นั้นมีค่าเป็นเลขคู่ในเลขฐาน 10 (เช่นในตัวอย่างข้างต้น 13_5 เท่ากับ 8 ในฐาน 10 ซึ่งเป็นเลขคู่ ผู้เล่นก็จะได้รับรางวัล แต่ถ้าผู้เล่นหยิบได้ 12_5 ผู้เล่นจะไม่ได้รับรางวัล เพราะว่า 12_5 เท่ากับ 7 ในฐาน 10)

   จงเขียนแผนภาพการผ่านของเอฟเอที่เป็นตัวแบบของเกมโชว์นี้ ถ้ากำหนดว่าสถานะยอมรับคือ สถานะที่ผู้เล่นได้รับรางวัล

3. นาย ก. พาเด็กสามคน คือ A, B, C ไปเที่ยว เมื่อไปถึงปรากฏว่าในสถานที่แห่งนั้นถูกแบ่งออกเป็นสองฝั่งคลอง โดยมีเรือลำเล็กจอดอยู่หนึ่งลำ เรือลำนี้สามารถบรรทุกคนได้อย่างมาก 2 คนเท่านั้น นาย ก. เป็นคนเดียวที่พายเรือเป็น ดังนั้นในแต่ละเที่ยว นาย ก. จะพาเด็กข้ามฝากได้อย่างมากเพียงหนึ่งคนเท่านั้น และเด็ก ๆ ทั้งสามต้องการนั่งเรือข้ามฝาก

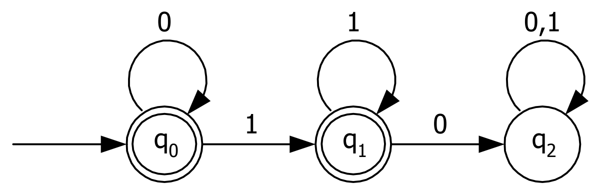
   ถ้านาย ก. ปล่อย A และ B ไว้ด้วยกันตามลำพัง เด็กสองคนนี้จะตีกัน ในทำนองเดียวกัน ถ้านาย ก. ปล่อย B และ C ไว้ด้วยกันตามลำพัง เด็กสองคนนี้จะตีคน แต่ A และ C อยู่ด้วยกันตามลำพังได้โดยไม่ตีกัน เป็นไปได้หรือไม่ที่ นาย ก. จะนำเด็กทั้งสามข้ามฝากได้ โดยที่ A, B, C ไม่ตีนกันเลย

   จงเขียนแสดงคำตอบที่นาย ก. จะนำเด็กทั้งสามข้ามฝากได้ โดยใช้แผนภาพการผ่านของเอฟเอที่เป็นตัวแบบของการแก้ปัญหานี้

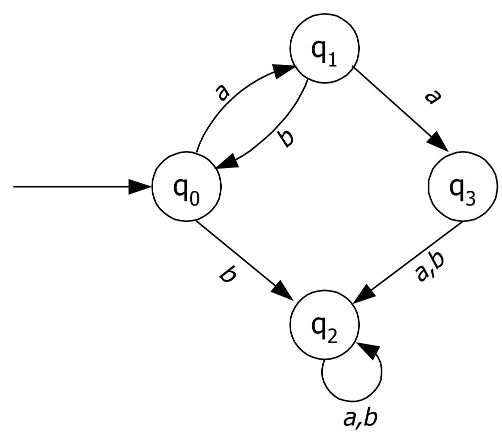
4. ให้ M เป็นออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด เครื่องหนึ่ง จงหาพร้อมพิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ $\varepsilon \in L(M)$ (M ยอมรับ ε)

5. สำหรับเอฟเอ M ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงเขียนบรรยาย L(M) โดยบอกเงื่อนไขการเป็นสมาชิกของ L(M)

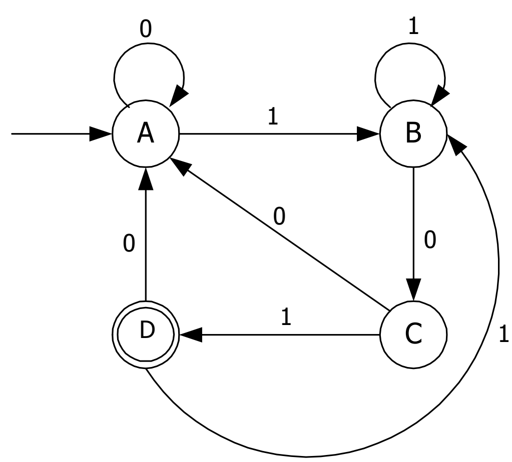
5.1



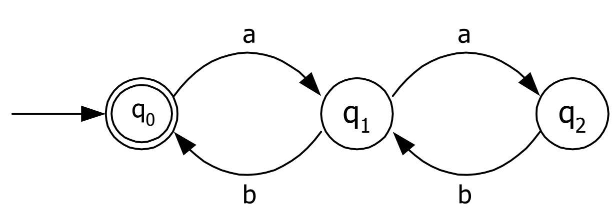
5.2



5.3



5.4



เอกสารอ้างอิง

สุวิมล ฮอลล์. (2542). **ทฤษฎีคณนา (Theory of Computation)**. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

Martin, John C. (1996). **Introduction to languages and the theory of computation** (2nd ed). Singapore: McGraw-Hill.