แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

6.1 ความนำ

6.2 ประเภทของกราฟ

6.2.1 กราฟธรรมดา

6.2.2 พหุกราฟ

6.2.3 กราฟเทียม

6.2.4 กราฟระบุทิศทาง

6.2.5 พหุกราฟระบุทิศทาง

6.3 แบบจำลองกราฟ

6.4 บัญญัติศัพท์ของกราฟ

6.4.1 คำศัพท์พื้นฐาน

6.4.2 สิ่งพิเศษของกราฟธรรมดา

6.4.3 กราฟสองฝ่าย

6.4.4 การประยุกต์ใช้งานกราฟแบบพิเศษ

6.5 การเชื่อมต่อ

6.5.1 วิถีและวงจรในกราฟไม่ระบุทิศทาง

6.5.2 วิถีและวงจรในกราฟระบุทิศทาง

6.5.3 การต่อถึงกันในกราฟไม่ระบุทิศทาง

6.5.4 การต่อถึงกันในกราฟระบุทิศทาง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาจำแนกประเภทของกราฟได้
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถเรียนรู้คำศัพท์ และทฤษฎีของกราฟ
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับการเชื่อมต่อ วิถีและวงจรของกราฟ
4. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้การหาวิถีสั้นที่สุดและนำไปประยุกต์ใช้เพื่อหาเส้นทางในระบบเครือข่ายได้
5. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถอธิบายทฤษฎีการให้สีกราฟได้
6. เพื่อให้ผู้ศึกษาประยุกต์ขั้นตอนวิธีทั้งหมดมาทำงานจริงบนเครื่องคอมพิวเตอร์ได้

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน
4. นำทฤษฎีที่เรียนรู้มาทำการเขียนโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็ปเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

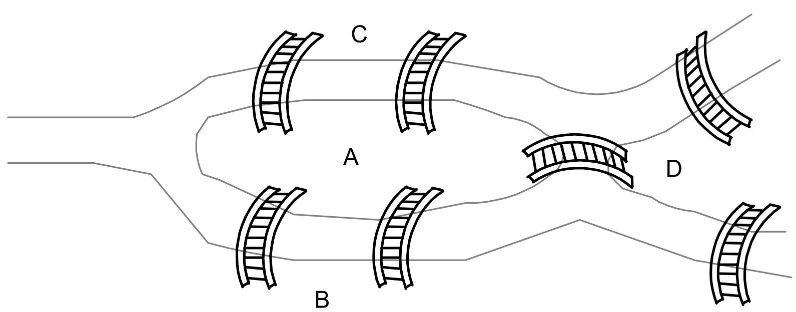
การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท
4. ตรวจงานการบ้าน
5. ตรวจโครงงานกลุ่มและงานเดี่ยว

บทที่ 6
กราฟ

6.1 ความนำ

แนวคิดพื้นฐานและทฤษฎีในเรื่องกราฟถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์-แลนด์ ชื่อเลียวนาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ในปี ค.ศ. 1736 เพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาสะพานโคนิก-สเบิร์ก (Konigsberg bridge problem) ซึ่งปัจจุบันสะพานแห่งนี้อยู่ในเมืองคาลินกราด ประเทศสาธารณรัฐรัสเซีย (Johnsonbaugh,1984, p.99 -100) ดังรูปที่ 6.1 โดยมีโจทย์ว่าจะข้ามสะพานทั้ง 7 เดินทางไปให้ครบทั้ง 4 เมืองได้อย่างไร ถ้ามีเงื่อนไขว่า แต่ละสะพานจะข้ามได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น ซึ่งได้ตีพิมพ์คำตอบปัญหาดังกล่าวด้วยทฤษฎีกราฟ ในรูปด้านขวาว่าเป็นไปไม่ได้



รูปที่ 6.1 สะพานโคนิกสเบิร์ก

การประยุกต์ใช้งานกราฟสามารถทำได้หลายอย่าง อาทิ ใช้ตรวจสอบว่าวงจรจะสามารถสร้างขึ้นจริงบนแผงวงจรได้หรือไม่ ใช้บอกความแตกต่างระหว่างสารประกอบเคมี 2 ชนิดที่มีสูตรทางเคมีเหมือนกัน แต่โครงสร้างต่างกัน ใช้กำหนดการเชื่อมต่อเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ใช้ในการหาวิถีสั้น

ที่สุด (shortest path) ของกระบวนการลำเลียงข้อมูลในระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ใช้ในจัดตารางสอบ และใช้ในการกำหนดช่องทีวีให้กับสถานีส่ง เป็นต้น

6.2 ประเภทของกราฟ

ประเภทของกราฟจำแนกตามรูปแบบและคุณลักษณะได้ดังต่อไปนี้

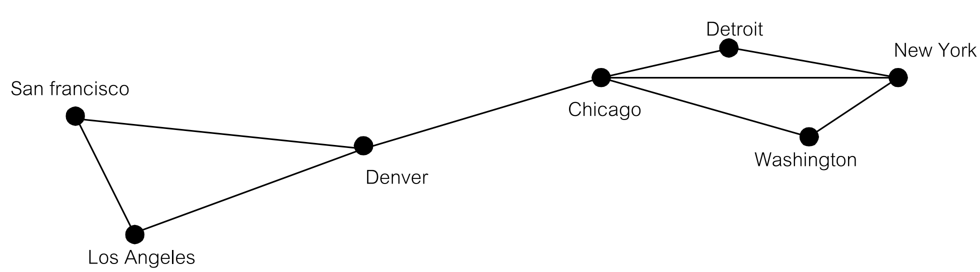
6.2.1 กราฟธรรมดา

กราฟธรรมดา (simple graph) เป็นกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมแบบวนซ้ำ (loop) และไม่มีเส้นเชื่อมแบบขนาน (parallel edge) หรือเส้นเชื่อมพหุ (multiple edge) ดังนิยามที่ 6.1

นิยามที่ 6.1 กราฟธรรมดา (simple graph) G = (V,E) ประกอบด้วย

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตของจุด (vertices) แทนด้วย V
2. เซตของคู่ที่ไม่เป็นลำดับของสมาชิกที่ต่างกันของ V เรียกว่าเส้นเชื่อม (edge) แทนด้วย E

ตัวอย่างกราฟธรรมดาแสดงดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 กราฟธรรมดาของเครือข่ายคอมพิวเตอร์เชื่อมระหว่างรัฐในอเมริกา

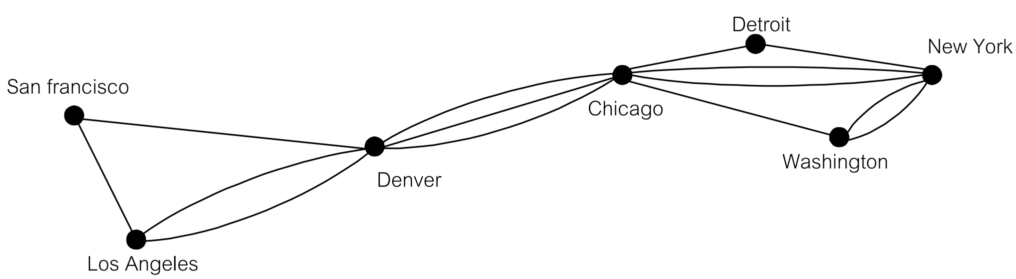
6.2.2 พหุกราฟ

พหุกราฟ (multigraph) เป็นกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมแบบวนซ้ำ แต่มีเส้นเชื่อมแบบขนาน ดังนิยามที่ 6.2

นิยามที่ 6.2 พหุกราฟ G=(V,E) ประกอบด้วยเซตของจุด V, เส้นเชื่อม E และ

ฟังก์ชัน $f:E \longrightarrow \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$

เส้นเชื่อม e_1 และ e_2 จะเรียกว่าเส้นเชื่อมขนาน หรือเส้นเชื่อมพหุ ถ้า $f(e_1)=f(e_2)$ โดยที่ระหว่างจุด (vertex) 2 จุด อาจจะมีเส้นเชื่อมมากกว่า 1 ได้ แต่จะไม่มีการวนซ้ำ ดังรูปที่ 6.3 ที่เครือข่ายของเมืองลอสแองเจิลลิส กับเมืองเดนเวอร์ และเมืองเดนเวอร์กับเมืองชิคาโก เป็นต้น

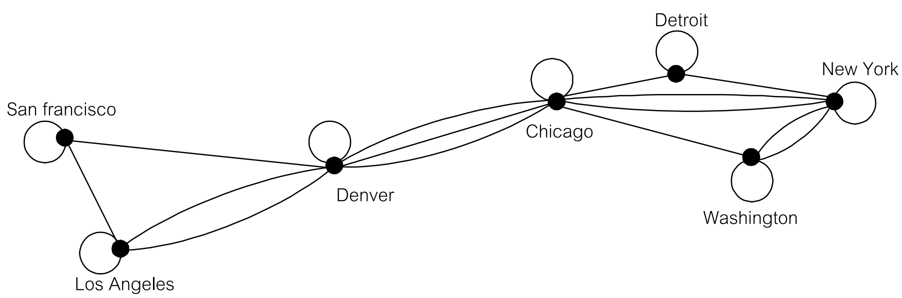


รูปที่ 6.3 พหุกราฟของเครือข่ายคอมพิวเตอร์เชื่อมระหว่างรัฐในอเมริกา

6.2.3 กราฟเทียม

กราฟเทียม (pseudograph) เป็นกราฟที่เส้นเชื่อมไม่มีทิศทาง การอ้างอิงจะใช้เซตของคู่จุดแทน ดังนิยามที่ 6.3

นิยามที่ 6.3 กราฟเทียม G=(V,E) ประกอบด้วยเซตของจุด V, เส้นเชื่อม E และฟังก์ชัน $f:E \longrightarrow \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$ เส้นเชื่อมจะเป็นการวนซ้ำ ถ้า $f(e)=\{u\}$ $\exists u \in V$ ซึ่งเป็นคุณสมบัติโดยทั่วไปของกราฟไม่ระบุทิศทาง (undirected graph) ดังรูปที่ 6.4

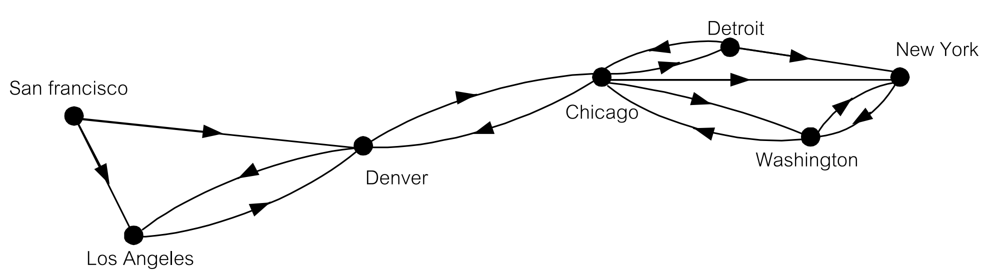


รูปที่ 6.4 กราฟเทียมของเครือข่ายคอมพิวเตอร์เชื่อมระหว่างรัฐในอเมริกา

6.2.4 **กราฟระบุทิศทาง**

กราฟระบุทิศทาง (directed graph) จะมีลูกศรกำกับทิศทางของเส้นเชื่อมแต่ละเส้นในกราฟและยังสามารถใช้คู่ลำดับของจุดแทนเส้นเชื่อม ถ้าเส้นเชื่อมที่จุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกันจะเรียกว่ามีการวนซ้ำ ดังนิยามที่ 6.4

นิยามที่ 6.4 กราฟระบุทิศทาง (V,E) ประกอบด้วยเซตของเซตของจุด V และเส้นเชื่อม E ซึ่งเป็นคู่ลำดับของสมาชิก V ที่มีลูกศรกำกับทิศทางของเส้นเชื่อม และถ้ามีเส้นเชื่อมแบบขนานจะที่มีทิศทางเหมือนกันไม่ได้ ดังรูปที่ 6.5

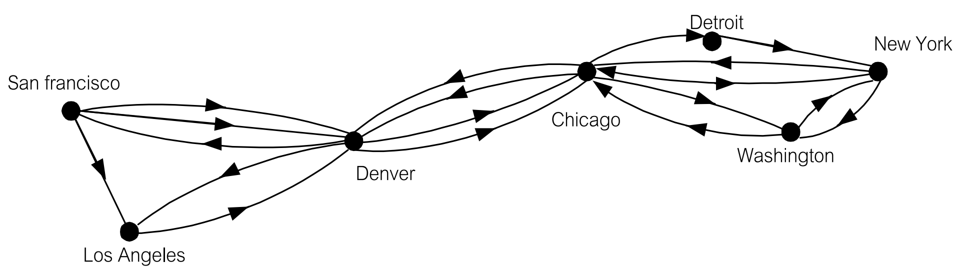


รูปที่ 6.5 กราฟระบุทิศทางของเครือข่ายคอมพิวเตอร์เชื่อมระหว่างรัฐในอเมริกา

6.2.5 พหุกราฟระบุทิศทาง

พหุกราฟระบุทิศทาง (directed multigraph) จะมีลูกศรกำกับทิศทางของเส้นเชื่อมแต่ละเส้นในกราฟเหมือนกับกราฟระบุทิศทางทุกอย่างต่างกันเพียงเส้นเชื่อมขนานจะมีทิศทางเดียวกันได้ ดังนิยามที่ 6.5

นิยามที่ 6.5 พหุกราฟระบุทิศทาง G=(V,E) ประกอบด้วยเซตของเซตของจุด V, เส้นเชื่อม E และฟังก์ชัน $f:E \longrightarrow \{(u,v) | u,v \in V\}$ เส้นเชื่อม e_1 และ e_2 จะเป็นเส้นเชื่อมขนานหรือเส้นเชื่อมพหุ ถ้า $f(e_1)=f(e_2)$ และเส้นเชื่อมขนานจะมีทิศทางเดียวกันได้ ดังรูปที่ 6.6 จากเมืองเดนเวอร์ไปชิคาโกมีเส้นคู่ขนานทั้งขาไปและกลับ ซึ่งขาไปทั้ง 2 เส้นมีทิศทางเดียวกัน และขากลับทั้ง 2 เส้นก็มีทิศทางเดียวกันได้ เป็นต้น



รูปที่ 6.6 พหุกราฟระบุทิศทางของเครือข่ายคอมพิวเตอร์เชื่อมระหว่างรัฐในอเมริกา

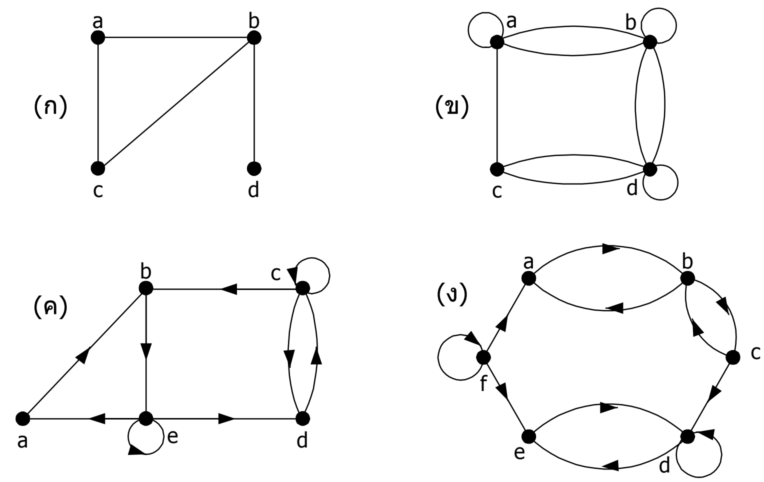
สรุปรูปแบบประเภทของกราฟ แบ่งตามลักษณะที่ต่างกันได้ ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 รูปแบบประเภทของกราฟต่าง ๆ

ประเภทของกราฟ	ทิศทาง	เส้นเชื่อมพหุ	การวนซ้ำ
กราฟธรรมดา	ไม่ระบุ	ไม่มี	ไม่มี
พหุกราฟ	ไม่ระบุ	มี	ไม่มี
กราฟเทียม	ไม่ระบุ	มี	มี
กราฟระบุทิศทาง	ระบุ	ไม่มี	มี
พหุกราฟระบุทิศทาง	ระบุ	มี	มี

ที่มา (Rosen, 1995, p.433)

ตัวอย่างที่ 6.1 พิจารณากราฟที่กำหนดให้ว่าเป็นกราฟประเภทใด



รูป (ก) เป็นกราฟธรรมดาเพราะไม่มีเส้นเชื่อมแบบวนซ้ำและไม่มีเส้นเชื่อมแบบขนาน

รูป (ข) เป็นกราฟเทียมเพราะมีเส้นเชื่อมที่ไม่มีทิศทางและมีการวนซ้ำ

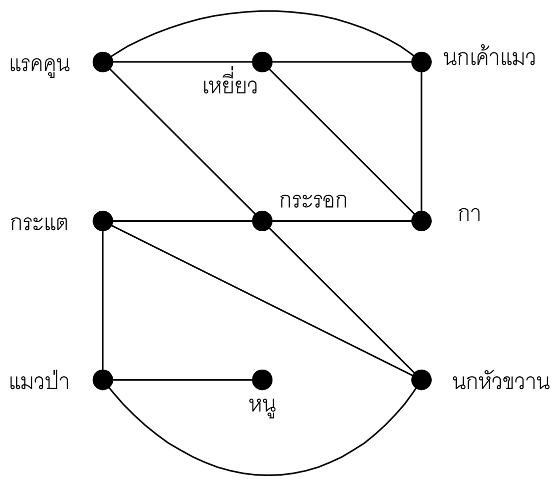
รูป (ค) เป็นกราฟระบุทิศทางเพราะมีลูกศรกำกับทิศทางของเส้นเชื่อม และมีเส้นเชื่อมแบบขนานที่มีทิศทางไม่เหมือนกัน

รูป (ง) เป็นพหุกราฟระบุทิศทางเพราะมีลูกศรกำกับทิศทางของเส้นเชื่อม และมีเส้นเชื่อมแบบขนานที่มีทิศทางเหมือนกัน ▌

6.3 แบบจำลองกราฟ

แบบจำลองกราฟ (graph model) เป็นการใช้กราฟนำเสนอข้อมูลจากขอบเขตของที่ได้รับมาโดยจะแสดงความเกี่ยวข้องของวัตถุ (Rosen, 1995, p.433)

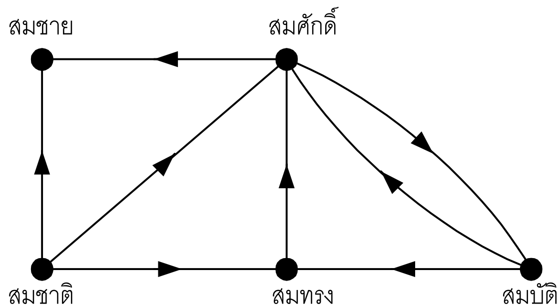
ตัวอย่างที่ 6.2 กราฟโพลงทับกัน (niche overlap) ในระบบนิเวศน์ของแบบจำลองการดำรงชีพที่เกี่ยวข้องกับสัตว์สปีชีส์ต่าง ๆ เช่น แสดงการแย่งอาหารของสัตว์ประเภทต่างๆ



รูปที่ 6.7 การดำรงชีพในระบบนิเวศน์ของสัตว์ในรูปแบบจำลองกราฟ

ให้ สปีชีส์ของสัตว์แทนด้วยเซตของจุดและการต่อสู้แทนด้วยเส้นเชื่อม กราฟในรูปที่ 6.7 บอกได้ว่ากากับเหยี่ยวแย่งอาหารกัน แต่เหยี่ยวกับกระรอก ไม่แย่งอาหารกัน เป็นต้น ∎

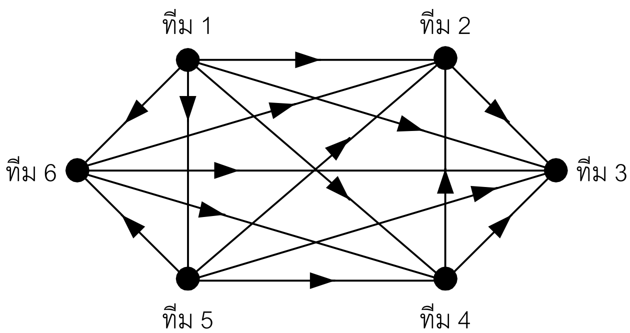
ตัวอย่างที่ 6.3 กราฟอิทธิพลที่ใช้แทนแบบจำลองพฤติกรรมด้านอิทธิพลของคนหนึ่งที่มีต่อความคิดของคนอื่น

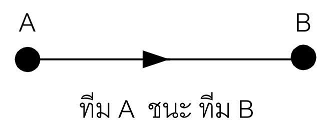


รูปที่ 6.8 กราฟที่ใช้แทนแบบจำลองอิทธิพลของคน

จากกราฟในรูปที่ 6.8 สมศักดิ์และสมชาติมีอิทธิพลกับสมชายแต่สมชายไม่มีอิทธิพลกับสมศักดิ์และสมชาติ หรือสมศักดิ์กับสมบัติต่างมีอิทธิพลซึ่งกันและกันเป็นต้น ▌

ตัวอย่างที่ 6.4 การแข่งขันแบบพบกันหมดใช้แบบจำลองของการจัดการแข่งขันกีฬา โดยที่แต่ละทีมจะแข่งกับทีมอื่น ๆ เพียงครั้งเดียว

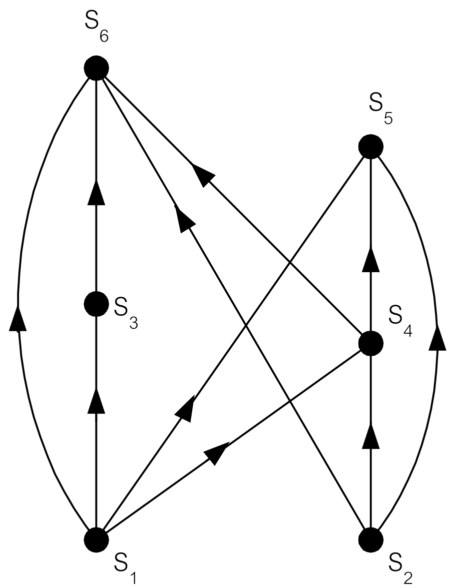




รูปที่ 6.9 กราฟที่ใช้แทนแบบจำลองอิทธิพลของคน

จากกราฟในรูปที่ 6.9 ทีม 6 แข่งขันกับทีม 1,2,3,4 และ 5 และชนะทีม 2,3 และ 4 แต่แพ้ให้แก่ทีม 1 และทีม 5 เป็นต้น ▌

ตัวอย่างที่ 6.5 กราฟลำดับก่อนหน้า (precedence graphs) ใช้กับแบบจำลองที่แทนการประมวลผลคำสั่งต่าง ๆ ใน โปรแกรมแบบประมวลผลพร้อมกัน ซึ่งจะทำให้การประมวลผลเร็วขึ้น เพราะแสดงได้พร้อม ๆ กันไม่ต้องรอ



S_1 a:=0

S_2 b:=1

S_3 c:=a+1

S_4 d:=b+a

S_5 e:=d+1

S_6 e:=c+d

รูปที่ 6.10 กราฟลำดับก่อนหน้าแสดงการประมวลผลโปรแกรม

จากรูปที่ 6.10 กราฟแสดงให้เห็นถึง คำสั่ง S_5 จะไม่สามารถประมวลผลได้ถ้าคำสั่ง S_1,S_2 และ S_4 ยังไม่ได้ทำการประมวลผล เป็นต้น ▮

6.4 บัญญัติศัพท์ของกราฟ

เพื่อให้เกิดความสอดคล้องต้องกันของการศึกษาเรื่องของกราฟ ได้มีการบัญญัติศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับส่วนประกอบต่าง ๆ ที่ใช้ในเรื่องของกราฟดังต่อไปนี้

6.4.1 คำศัพท์พื้นฐาน

คำศัพท์พื้นฐานในเรื่องกราฟจะเป็นการอธิบายเซตของจุดและเส้นเชื่อมของกราฟที่ไม่ระบุทิศทางโดยมีนิยามที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

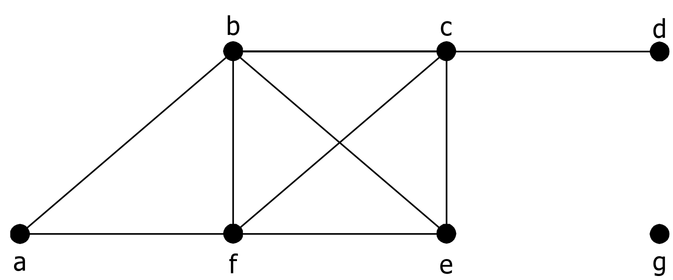
นิยามที่ 6.6 ถ้ามีจุด 2 จุด u และ v ในกราฟไม่ระบุทิศทาง G จะเรียกจุดสองจุดนั้นว่าต่อกัน (adjacent) ใน G และเรียกจุดที่เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมหนึ่งว่าติดกับ (incident)

นิยามที่ 6.7 จำนวนของเส้นเชื่อมที่ติดกับจุด v จะเรียกว่าดีกรี (degree) ของจุด v แต่ในกรณีที่เป็นเส้นเชื่อมแบบวนซ้ำจะนับเส้นเชื่อมเท่ากับ 2 เส้น เขียนเป็น deg(v)

จุดที่มีดีกรี = 0 เรียกว่าจุดโดดเดี่ยว (isolated)

จุดที่มีดีกรี = 1 เรียกว่าจุดค้าง (pendant)

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาดีกรีของจุดทุกจุดของกราฟในรูป ที่ 6.11



deg(a)= 2

deg(b)= deg(c)= deg(f) =4

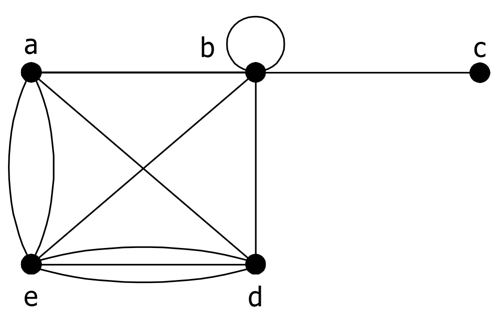
deg(d)= 1

deg(e)= 3

deg(g)= 0 ∎

รูปที่ 6.11 กราฟตัวอย่างไม่มีการวนซ้ำ

ตัวอย่างที่ 6.7 จงหาดีกรีของจุดทุกจุดของกราฟในรูป ที่ 6.12



deg(a)= 4

deg(b)= deg(e)= 6

deg(c)= 1

deg(d)= 5 ∎

รูปที่ 6.12 กราฟตัวอย่างที่มีการวนซ้ำ

ทฤษฎีบทที่ 6.1 ทฤษฎีการจับมือ (handshaking theorem) ให้ G=(V,E) เป็นกราฟไม่ระบุทิศทาง ซึ่งมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากับ e แล้ว

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

ซึ่งหมายถึงผลรวมของดีกรีของทุก ๆ จุดในกราฟไม่ระบุทิศทาง G จะเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ

พิสูจน์ที่ 6.1 เนื่องจากเส้นเชื่อมใด ๆ จะติดอยู่กับจุด 2 จุด ดังนั้นเส้นเชื่อมหนึ่งจะถูกนับเป็นหนึ่งในดีกรีของแต่ละจุดปลาย (ถูกนับ 2 ครั้ง) ดังนั้นผลรวมดีกรีของจุดทุกจุดจึงเป็นสองเท่าขอจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6.8 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟซึ่งมี 10 จุดแต่ละจุด มีดีกรี = 6

$2e = 10+10+10+10+10+10$

$\therefore e = 30$ $\blacksquare$

ทฤษฎีบทที่ 6.2 กราฟไม่ระบุทิศทาง จะมีจำนวนจุดซึ่งมีดีกรีเป็นเลขคี่ เป็นจำนวนเลขคู่

พิสูจน์ที่ 6.2 ให้ V_1 = เซตของจุดซึ่งมีดีกรีคู่

V_2 = เซตของจุดซึ่งมีดีกรีคี่

$$\underbrace{2e}_{\text{เลขคู่}} = \sum_{v \in V} \deg(v) = \underbrace{\sum_{v \in V_1} \deg(v)}_{\text{เลขคู่}} + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

$\therefore$ จำนวนใน V_2 ต้องเป็นเลขคู่

นิยามที่ 6.8 เมื่อ (u,v) เป็นเส้นเชื่อมของกราฟ G ซึ่งเป็นกราฟไม่ระบุทิศทาง แล้ว u จะถูกเรียกว่าต่อกันที่ v และ v จะถูกเรียกว่าต่อกันจาก u u เรียกว่าจุดเริ่ม (initial) ของ (u,v)

v เรียกว่าจุดปลาย (terminal) ของ (u,v)

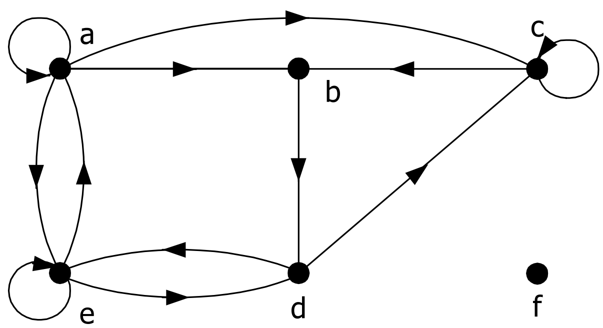
ถ้า u=v เส้นเชื่อมจะเป็นการวนซ้ำ

นิยามที่ 6.9 สำหรับกราฟที่มีเส้นเชื่อมที่ระบุทิศทาง

ดีกรีขาเข้า (in-degree) ของจุด v ($deg^{--}(v)$) คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดปลาย

ดีกรีขาออก (out-degree) ของ v ($deg^{+}(v)$) คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดเริ่ม

ตัวอย่างที่ 6.9 จงหาดีกรีขาเข้าและดีกรีขาออกของทุกจุดในกราฟรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 กราฟตัวอย่างในการหาดีกรีขาเข้าและออก

$deg^{-}(a)=2$, $deg^{-}(b)=2$, $deg^{-}(c)=3$, $deg^{-}(d)=2$, $deg^{-}(e)=3$, $deg^{-}(f)=0$

$deg^{+}(a)=4$, $deg^{+}(b)=1$, $deg^{+}(c)=2$, $deg^{+}(d)=2$, $deg^{+}(e)=3$, $deg^{+}(f)=0$ ▮

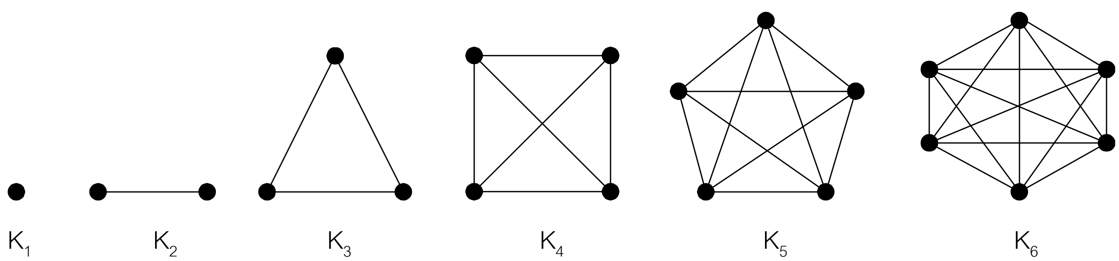
ทฤษฎีบทที่ 6.3 ให้ G = (V,E) เป็นกราฟซึ่งมีเส้นเชื่อมที่ระบุทิศทาง

แล้ว $\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = |E|$

6.4.2 สิ่งพิเศษของกราฟธรรมดา

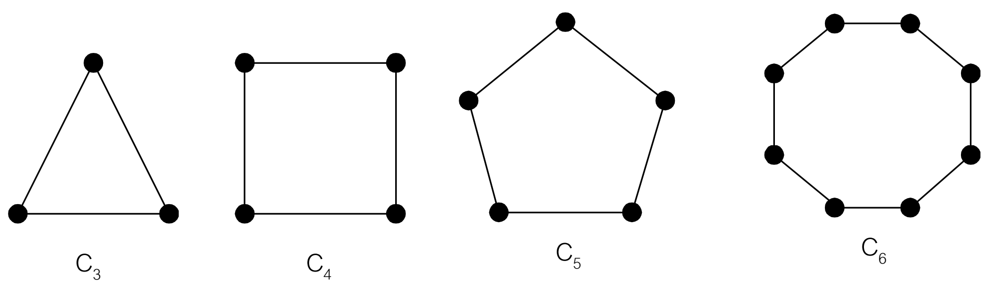
สิ่งพิเศษของกราฟธรรมดาคือเมื่อนำมาจัดรูปแบบของจุดและเส้นเชื่อมใหม่จะทำให้เกิดกราฟชนิดต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.10 กราฟบริบูรณ์ (complete graph) K_n คือกราฟธรรมดาที่มีเส้นเชื่อมเพียง 1 เส้นระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ ที่ต่างกัน ดังรูปที่ 6.14



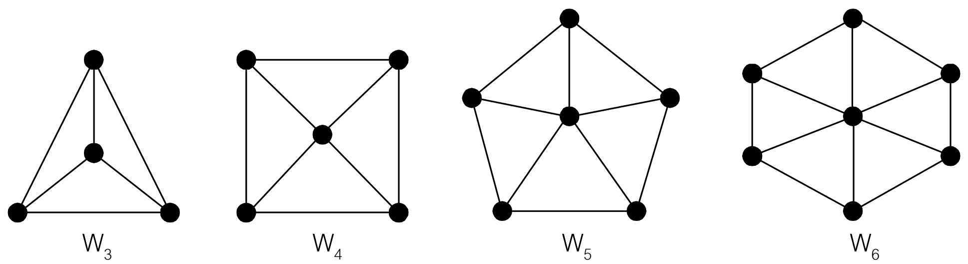
รูปที่ 6.14 กราฟบริบูรณ์รูปแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 6.11 วงกลม (cycle) $C_n, n \geq 3$ ประกอบด้วย n จุด $v_1, v_2, \ldots, v_n$ และเส้นเชื่อม $\{v_1,v_2\}$, $\{v_2,v_3\}, \ldots, \{v_{n-1},v_n\}$, และ $\{v_n,v_1\}$ ดังรูปที่ 6.15



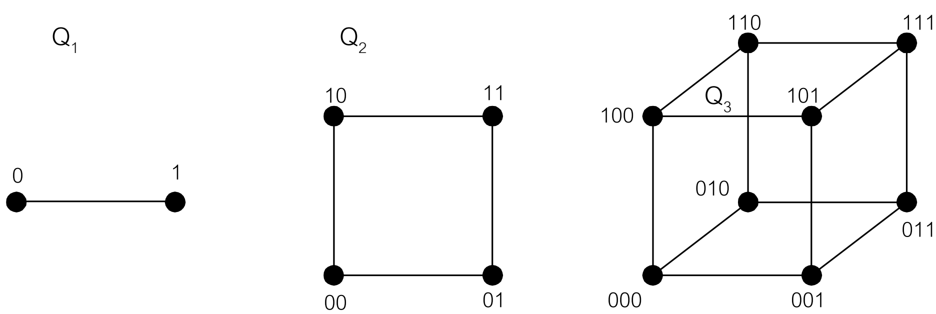
รูปที่ 6.15 วงกลมรูปแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 6.12 วงล้อ (wheel) W_n ได้จากการเพิ่มจุดเข้าไปในวงกลม c_n,n≥3 และเชื่อมจุดใหม่นี้กับ n จุด ของ c_n ดังรูปที่ 6.16



รูปที่ 6.16 วงล้อรูปแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 6.13 n-ลูกบาศก์ (n-cubes) Q_n เป็นกราฟที่มีจุดแทน 2^n บิตของสายอักษรขนาด n จำนวน 2 จุด จะต่อกันก็ต่อเมื่อสายของบิตที่มันแทนต่างกันเพียง 1 บิต ดังรูปที่ 6.17



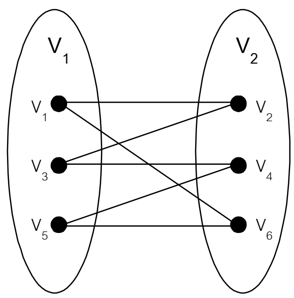
รูปที่ 6.17 ลูกบาศก์รูปแบบต่าง ๆ

6.4.3 **กราฟสองฝ่าย**

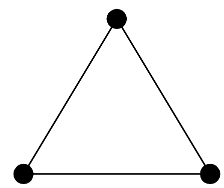
กราฟสองฝ่าย (bipartite graph) จะเป็นกราฟที่มีการแบ่งจุดออกเป็น 2 ฝ่ายชัดเจน โดยทั้ง 2 ฝ่ายต่างก็ไม่เป็นเซตว่างและจุดของแต่ละฝ่ายต้องแยกจากกันอย่างสมบูรณ์ ดังนิยามที่ 6.10

นิยามที่ 6.10 กราฟธรรมดา G จะเรียกว่ากราฟสองฝ่าย ถ้าเซตจุดของ V สามารถจะแบ่งเป็น 2 ส่วนที่ไม่ว่างและเป็นส่วนเดียวกัน V_1 และ V_2 โดยที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเชื่อมในกราฟจะเชื่อมต่อระหว่างจุดใน V_1และ ใน V_2

ตัวอย่างที่ 6.14 กราฟต่อไปนี้ข้อใดเป็นกราฟสองฝ่าย

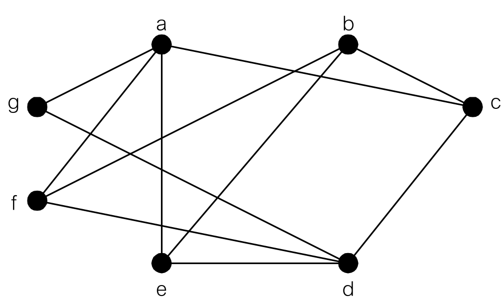


เป็นกราฟสองฝ่าย

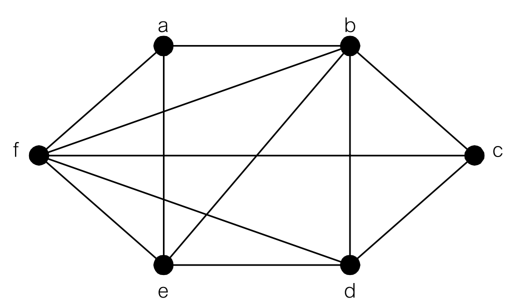


ไม่เป็นกราฟสองฝ่าย

ตัวอย่างที่ 6.15 กราฟต่อไปนี้ข้อใดเป็นกราฟสองฝ่าย



G

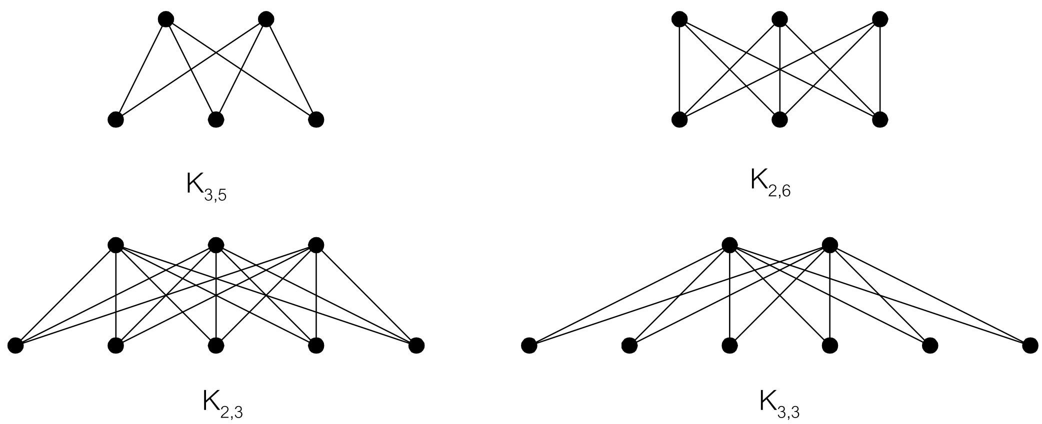


H

กราฟ G เป็นกราฟสองฝ่ายเพราะสามารถแบ่งเป็นสองฝ่ายที่ไม่เกี่ยวข้องกันชัดเจนคือ {a,b,d} กับ {c,e,f,g}

กราฟ H ไม่เป็นกราฟสองฝ่ายเพราะไม่สามารถแบ่งเป็นสองส่วนที่ไม่เกี่ยวข้องกันชัดเจนได้พิจารณาจาก จุด a,b และ f จะสัมพันธ์กัน

ตัวอย่างที่ 6.16 กราฟ G จะเป็นกราฟสองฝ่ายบริบูรณ์ $K_{m,n}$ ถ้าจุดของมันสามารถจะแบ่งเป็น 2 เซตย่อยที่มี m และ n จุด และจะมีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ก็ต่อเมื่อจุดหนึ่งอยู่ในเซตย่อยหนึ่ง และอีกจุดหนึ่งอยู่ในอีกเซตย่อยหนึ่งเท่านั้น ดังรูปที่ 6.18



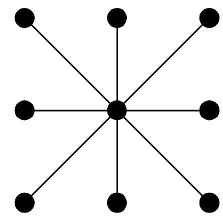
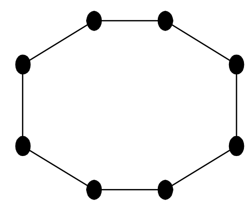
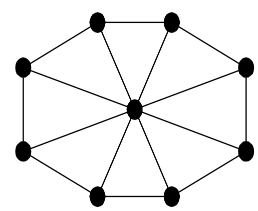
รูปที่ 6.18 ตัวอย่างของกราฟสองฝ่ายบริบูรณ์

6.4.4 การประยุกต์ใช้งานกราฟแบบพิเศษ

การประยุกต์ใช้งานกราฟแบบพิเศษสามารถทำได้ในระบบเครือข่ายท้องถิ่น (Local Area Network: LAN) โดยแทนการเชื่อมต่อของเครื่องคอมพิวเตอร์และอุปกรณ์รอบข้างต่าง ๆ เข้าด้วยกันในระยะทางที่ไม่ไกลมากนัก แบ่งประเภทการเชื่อมต่อได้ ดังรูปที่ 6.19

6.5 การเชื่อมต่อ

การเชื่อมต่อ (connectivity) เป็นปัญหาที่สามารถสร้างแบบจำลองด้วยกราฟซึ่งเกี่ยวข้องกับการเดินทาง อาทิ การส่งข้อมูลระหว่างคอมพิวเตอร์ เส้นทางสำหรับการส่งไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ การเก็บขยะและการวิเคราะห์เครือข่าย เป็นต้น รูปแบบการเชื่อมต่อมีดังต่อไปนี้

โทโพโลจีดาว (star topology) มีจุดศูนย์กลางเชื่อมต่อไปยังอุปกรณ์อื่น ๆ ทั้งหมดจะใช้กราฟสองฝ่ายบริบูรณ์ $K_{1,n}$	
โทโพโลจีวงแหวน (ring topology) แต่ละอุปกรณ์จะเชื่อมต่อไปยังอุปกรณ์อื่น 2 ข้างเท่านั้น จะใช้ กราฟวงกลม C_n	
โทโพโลจีลูกผสม (hybrid topology) รวมกันระหว่างโทโพโลจีดาวและวงแหวน ข้อมูลอาจจะส่งผ่านไปตามวงแหวนหรือศูนย์กลางของอุปกรณ์ซึ่งจะเสถียรมากขึ้น จะใช้กราฟวงล้อ W_n	

รูปที่ 6.19 การประยุกต์ใช้กราฟในโทโพโลจีเครือข่ายคอมพิวเตอร์

6.5.1 วิถีและวงจรในกราฟไม่ระบุทิศทาง

นิยามที่ 6.11 วิถีขนาด n จาก u ไป v ในกราฟไม่ระบุทิศทางจะเป็นอันดับของเส้นเชื่อม $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ของกราฟ ซึ่ง

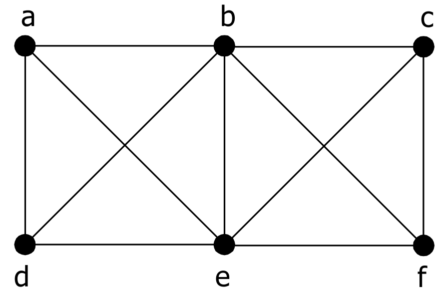
$$f(e_1) = \{x_0,x_1\}, f(e_2) = \{x_1,x_2\},\ldots,f(e_n) = \{x_{n-1},x_n\}$$

เมื่อ $x_0 = u, x_n=v$ (เขียนเป็น $x_0,x_1,x_2,\ldots x_n$)

วิถีจะเป็นวงจร (circuit) ถ้า x_0,x_n เป็นจุดเดียวกัน หรือ u=v

วิถีธรรมดา (simple path) คือวิถีหรือวงจรซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 6.17 พิจารณากราฟธรรมดา ในรูปที่ 6.20 หาวิถีและวงจร



รูปที่ 6.20 กราฟธรรมดา

"a,d,c,f,e" เป็นวิถีธรรมดาขนาด 4 คือ {a,d},{d,c}, {c,f} และ {f,c}

"d,e,c,a" ไม่เป็น เพราะ {e,c} ไม่ใช่เส้นเชื่อม

"b,c,f,e,b" เป็นวงจรขนาด 4 คือ {b,c}, {c,f},{f,e} และ {e,b}

"a,b,e,d,a,b" ไม่เป็นวิถีธรรมดาเพราะมีเส้นเชื่อม {a,b} ซ้ำกัน 2 ครั้ง ∎

6.5.2 วิถีและวงจรในกราฟระบุทิศทาง

นิยามที่ 6.12 วิถีขนาด n จาก u ไป v ในกราฟระบุทิศทาง จะเป็นอันดับของเส้นเชื่อม $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n$ ซึ่ง

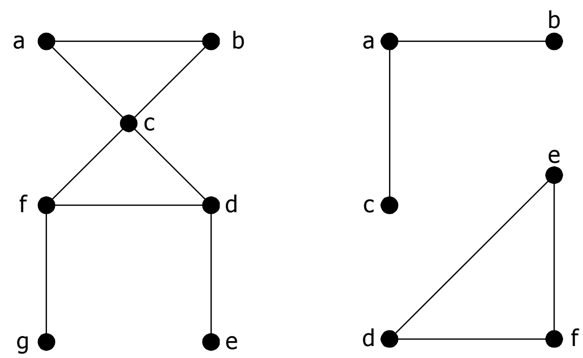
$f(e_1) = (x_0,x_1)$, $f(e_2) = (x_1,x_2),\ldots,f(x_n) = (x_{n-1},x_n)$ โดยที่ $x_0 = u$, $x_n = v$

ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมพหุ จะเขียนแทนกราฟด้วย $x_0,x_1,\ldots,x_n$ วงจรหรือวงกลมจะเป็น วิถีซึ่ง u=v วิถีธรรมดาคือวิถีหรือวงจรซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมซ้ำกัน

6.5.3 การต่อถึงกันในกราฟไม่ระบุทิศทาง

นิยามที่ 6.13 กราฟไม่ระบุทิศทางจะเรียกว่ามีการต่อถึงกันถ้ามีวิถีระหว่างทุก ๆ คู่ ของจุด

ตัวอย่างที่ 6.18 กราฟดังรูปที่ 6.21 ต่อไปนี้ข้อใดมีการต่อถึงกัน



มีการต่อถึงกัน ไม่มีการต่อถึงกัน

รูปที่ 6.21 กราฟตัวอย่างเพื่อพิจารณาการต่อถึงกัน

ทฤษฎีบทที่ 6.4 ในกราฟต่อถึงกันจะมีกราฟธรรมดาระหว่าง 2 จุดใด ๆ เสมอ

พิสูจน์ที่ 6.4 ให้ u และ v เป็น 2 จุดใด ๆ ที่ต่างกันของ G (V,E)

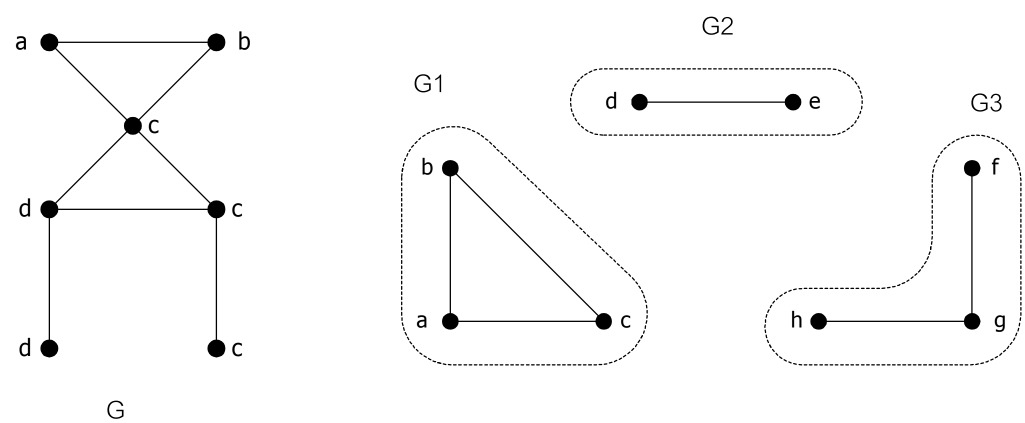
∴ G มีการต่อถึงกัน

∴ จะมีวิถีระหว่าง u และ v อย่างน้อย 1 วิถี

วิถีที่สั้นที่สุดจะสร้างรูปแบบเป็นกราฟธรรมดาเพราะถ้ามี $x_i = x_j$ สำหรับจุดในวิถีแล้ว วิถีนี้ไม่ใช่วิถีที่สั้นที่สุด ระหว่าง u และ v

กราฟที่ไม่มีการต่อถึงกันจะประกอบด้วยกราฟย่อย (subgraph) ซึ่งไม่มีจุดร่วม กราฟย่อยที่ไม่มีการต่อถึงกัน (disconnected) และไม่อยู่ในเซตเดียวกันจะเรียกว่าตัวประกอบ (component) ของกราฟ

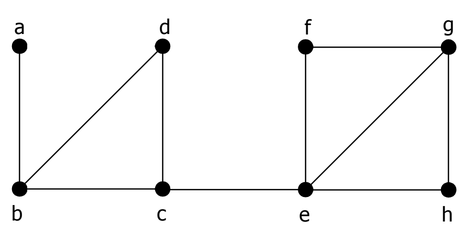
ตัวอย่างที่ 6.19 จงหาตัวประกอบการต่อถึงกันของกราฟจากรูปที่ 6.22



รูปที่ 6.22 กราฟ G และตัวประกอบของกราฟ G (G1,G2 และ G3)

การตัดจุดในกราฟต่อถึงกัน (รวมเส้นเชื่อมที่ติดกับจุดนั้น) จะทำให้เป็นกราฟไม่ต่อถึงกัน และการตัดเส้นเชื่อมทำให้กราฟต่อถึงกันกลายเป็นกราฟไม่ต่อถึงกัน ▌

ตัวอย่างที่ 6.20 จงหาการตัดจุดในกราฟดังรูปที่ 6.23 และการตัดเส้นเชื่อมของกราฟต่อไปนี้ให้เป็นกราฟไม่ต่อถึงกัน



รูปที่ 6.23 กราฟต่อถึงกัน

วิธีทำ ทำให้เป็นกราฟไม่ต่อถึงกันโดย

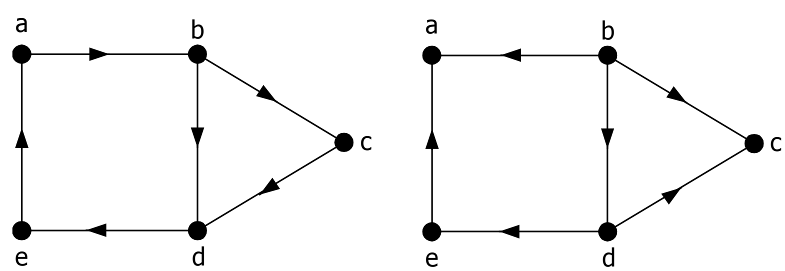
ตัดจุดในกราฟ : b,c,e

ตัดเส้นเชื่อม : {a,b},{c,e} ▌

6.5.4 การต่อถึงกันในกราฟระบุทิศทาง

นิยามที่ 6.14 กราฟระบุทิศทางจะเป็นการเชื่อมต่อแข็งแกร่ง (strongly connected) ถ้ามีวิถีจาก a ไป b และจาก b ไป a เมื่อ a,b เป็น จุดใน G แต่อาจจะเป็นการเชื่อมต่ออ่อนแอ (weakly connected) ถ้ามีวิถีระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ โดยไม่คำนึงถึงทิศทาง (คิดเหมือนเป็นกราฟไม่ระบุทิศทาง)

ตัวอย่างที่ 6.21 พิจารณากราฟจากรูปที่ 6.24 ต่อไปนี้กราฟใดมีการเชื่อมต่อแข็งแกร่งและมีการเชื่อมต่ออ่อนแอ



G H

รูปที่ 6.24 กราฟตัวอย่างสำหรับพิจารณาการเชื่อมต่อ

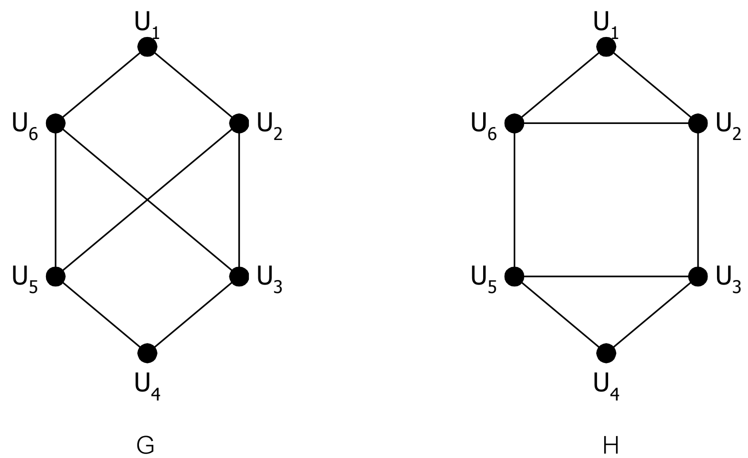
กราฟ G มีมีการเชื่อมต่อแข็งแกร่งและมีการเชื่อมต่ออ่อนแอด้วย

กราฟ H มีเฉพาะการเชื่อมต่ออ่อนแอ เพราะบางคู่ไม่มีวิถีเช่น A $\not\to$ b ▮

6.5.5 วิถีและการพ้องรูปกัน

วิถีและวงจรจะช่วยบอกได้ว่ากราฟพ้องรูปกัน (isomorphism) หรือไม่ วงจรธรรมดาขนาดต่าง ๆ ที่ปรากฏในกราฟจะช่วยบอกได้ว่ากราฟพ้องรูปกันหรือไม่ วิถีช่วยสร้างการชี้ตำแหน่งว่าเป็นการพ้องรูปกัน โดยกราฟที่พ้องรูปกันต้องมีจำนวนจุดและเส้นเชื่อมเท่ากัน จำนวนและดีกรีของจุดเท่ากัน มีวงจรธรรมดาขนาดเท่ากัน และมีวิถีที่ผ่านทุกจุดเริ่มและจบด้วยดีกรีที่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 6.22 จงพิจารณาว่ากราฟ G และ H จากรูปที่ 6.25 พ้องรูปกันหรือไม่



รูปที่ 6.25 กราฟตัวอย่างที่ไม่มีการพ้องรูปกัน

เลือกพิจารณาสิ่งที่ต่างกัน

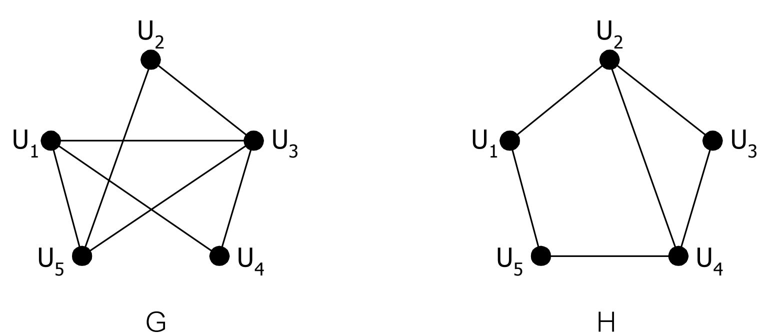
1. กราฟ G และ H มีจุดและเส้นเชื่อมเท่ากัน

2. กราฟ G และ H มีจำนวนและดีกรีของจุดเท่ากัน

3. H มีวงจรธรรมดาขนาด = 3 แต่ G ไม่มี

$\therefore$ H,G ไม่พ้องรูปกัน ∎

ตัวอย่างที่ 6.23 จงพิจารณาว่ากราฟ G และ H จากรูปที่ 6.26 ว่าพ้องรูปกันหรือไม่



รูปที่ 6.26 กราฟตัวอย่างที่มีการพ้องรูปกัน

เลือกพิจารณาสิ่งที่ต่างกัน

1. กราฟ G และ H มีจำนวนจุดและเส้นเชื่อมเท่ากัน
2. กราฟ G และ H มีจำนวนและดีกรีของจุดเท่ากัน
3. มีวงจรธรรมดาขนาด 3,4,5 ดังนั้น H และ G อาจจะพ้องรูปกัน
4. ลองพยายามหา f พิจารณาจากวิถี u_1,u_4,u_3,u_2,u_5 ใน G และ v_3,v_2,v_1,v_5,v_4 ใน H วิถีที่ผ่านทุกจุดเริ่มและจบด้วย v มีดีกรี = 3

ให้

$f(u_1) = v_3$	$f(u_2) = v_5$	{ f การสงวนเส้นเชื่อมที่ต่อกันแบบเมทริกซ์ ของทั้งคู่เหมือนกัน }
$f(u_4) = v_2$	$f(u_5) = v_4$	
$f(u_3) = v_1$		

$\therefore$ กราฟ G และ H พ้องรูปกัน ∎

6.5.6 การนับวิถีระหว่างจุด

การนับจำนวนวิถีระหว่างจุด สามารถทำได้โดยใช้เมทริกซ์ต่อกัน (adjacency matrix) ดังทฤษฎีบทที่ 6.5

ทฤษฎีบทที่ 6.5 ให้ G เป็นกราฟ และ A เป็นเมทริกซ์ต่อกันที่เกี่ยวข้องกับ $v_1,v_2,\ldots v_n$ (อาจจะเป็นการระบุทิศทางหรือไม่ระบุทิศทางที่เป็นพหุกราฟและมีการวนซ้ำ) จำนวนวิถีขนาด r จาก v_i ไป v_j จะเท่ากับดัชนีกำกับ $(i,j)^{th}$ ของ A^r

พิสูจน์ที่ 6.5 ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ที่ r=1 จำนวนวิถีจาก v_i ไป v_j ขนาด =1 จะเท่ากับดัชนีกำกับ $(i,j)^{th}$ เพราะ ดัชนีกำกับนี้เป็นจำนวนเส้นเชื่อมจาก v_i ไป v_j

สมมติ เป็นจริงที่ r

นั่นคือ $(i,j)^{th}$ ของ A^r เป็นจำนวนวิถีขนาด =r จาก v_i ไป v_j

$\because A^{i+1} = A^i \cdot A$

$(i,j)^{th}$entry ของ $A^{r+1} = b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\ldots+b_{in}a_{nj}$

$b_{ik} = (i,k)^{th}$ ดัชนีกำกับ ของ A^r = จำนวนวิถีขนาด r จาก v_i ไป v_k

$a_{kj} = (k,j)^{th}$ ดัชนีกำกับ ของ A = จำนวนวิถีขนาด 1 จาก v_k ไป v_j

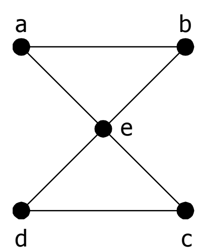
$\therefore$ โดยกฎของการคูณของการนับจำนวน วิถีของความยาว r+1

= (จำนวนวิถี จาก v_i ไป v_k) x (จำนวนวิถี จาก v_k ไป v_j)

ผลรวมของจุดที่เป็นไปได้ K จะได้จำนวนวิถีขนาด r+1 ทั้งหมด

$\therefore$ เป็นจริงที่ r+1

ตัวอย่างที่ 6.24 จงหาจำนวนวิถีขนาด =4 ทั้งหมดจาก a ไป d ของกราฟ G ซึ่งแสดงดังนี้



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

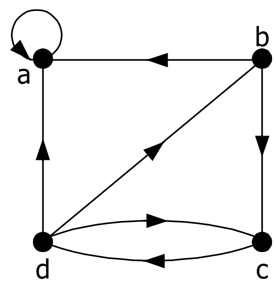
จำนวนวิถีขนาด 4 จาก a ไป d จะเท่ากับ ดัชนีกำกับ $(1,4)^{th}$ ของ A^4

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ มี 8 วิถี

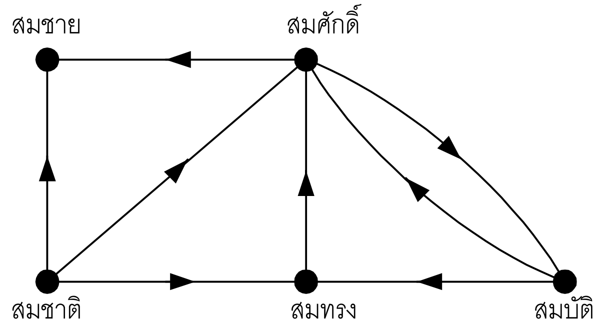
a b a b d	a c a b d
a b a c d	a c a c d
a b d b d	a c d b d
a b d c d	a c d c d

จุดหลักสำคัญ (vertex basis) ในกราฟระบุทิศทางเป็นเซตของจุดซึ่งมีวิถีไปยังทุกจุดในกราฟระบุทิศทาง



จุดหลักสำคัญ = {d} ∎

ตัวอย่างที่ 6.25 จงหานัยสำคัญ (significant) ของจุดหลักสำคัญในกราฟอิทธิพลต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาจุดหลักสำคัญ



นัยสำคัญของจุดหลักสำคัญในกรณีนี้คือ คนที่มีอิทธิพลกับคนอื่นทั้งหมด

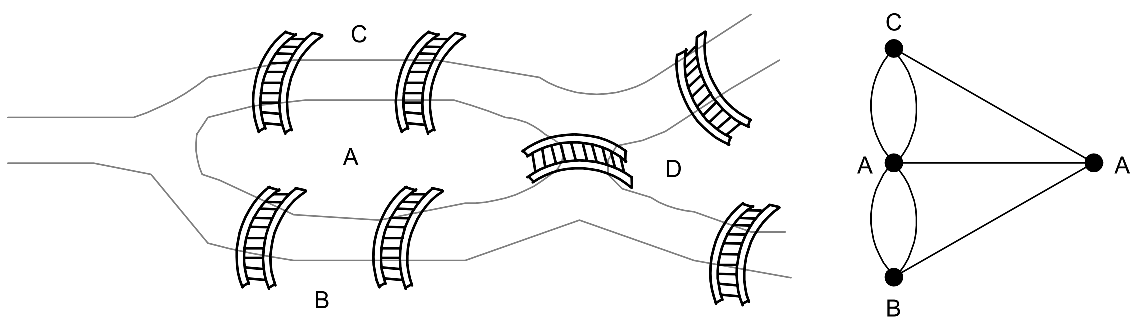
∴ จุดหลักสำคัญ = {สมศักดิ์} ∎

6.6 วิถีและวงจรของออยเลอร์และของแฮมิลตัน

วิถี วงจร และคุณสมบัติบางอย่างของกราฟถูกนำมากำหนดคุณสมบัติโดยนักคณิตศาสตร์เพื่อนำมาสร้างทฤษฎีใช้ในการแก้ปัญหา เช่น ของเลียวนาร์ด ออยเลอร์ จึงตั้งเพื่อเป็นเกียรติชื่อว่า วิถีและวงจรออยเลอร์ และของเซอร์ วิลเลียม แฮมิลตัน เรียกว่าวิถีและวงจรแฮมิลตัน

6.6.1 วิถีออยเลอร์และวงจรออยเลอร์

ออยเลอร์ได้ใช้กราฟมาช่วยแก้ปัญหาสะพานโคนิกสเบิร์ก เมื่อแทนด้วยกราฟปัญหาจะเปลี่ยนเป็น “มีวงจรธรรมดาที่บรรจุทุกเส้นเชื่อมของกราฟนี้หรือไม่” ดังรูปที่ 6.27 ในด้านขวามือสุด



รูปที่ 6.27 สะพานโคนิกสเบิร์กและการแก้ปัญหาด้วยกราฟ

นิยามที่ 6.15 วงจรออยเลอร์ (Euler circuit) ในกราฟ G คือวงจรธรรมดาที่บรรจุทุกเส้นเชื่อม ของกราฟ G วิถีออยเลอร์ (Euler paths) ในกราฟ G คือวงจรธรรมดาที่บรรจุทุกเส้นเชื่อมของกราฟ G

6.6.2 เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง

ออยเลอร์ค้นพบเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง (necessary and sufficient condition) ที่จะทำให้กราฟต่อถึงกันมีวงจรออยเลอร์เมื่อเขาแก้ปัญหาสะพานโคนิกสเบิร์ก นั่นคือทุกจุดจะต้องเป็นดีกรีคู่

6.6.2.1 เงื่อนไขจำเป็นกล่าวว่า ถ้ามีวงจรออย์เลอร์แล้ว ทุกจุดจะต้องเป็นดีกรีคู่ สำหรับจุดอื่น ๆ ก็เช่นเดียวกันจะเป็นดีกรีคี่ไม่ได้ เพราะวงจรจะผ่านทะลุ (pass through)

6.6.2.2 เงื่อนไขพอเพียงกล่าวว่าถ้าทุกจุดเป็นดีกรีคู่จะมีวงจรออย์เลอร์

ทฤษฎีบทที่ 6.6 พหุกราฟต่อถึงกันจะมีวงจรออย์เลอร์ ก็ต่อเมื่อทุกจุดมีดีกรีคู่

ข้อสังเกต ปัญหาสะพานโคนิกสเบิร์กทุกจุดเป็นดีกรีคี่ ดังนั้นจึงไม่มีวงจรออย์เลอร์

ขั้นตอนวิธี ***Procedure*** Euler (G:Connected multigraph with all vertices of even degree)

Circuit = circuit ใน G (หาให้ได้ซัก 1 circuit)

H = G – circuit

While H ยังมีเส้นเชื่อมเหลืออยู่

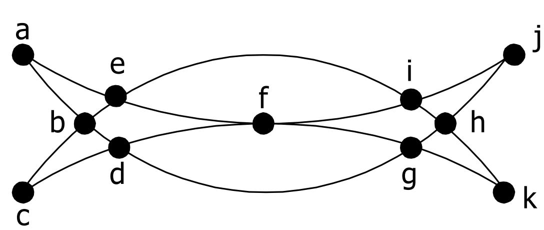
subcircuit = circuit ใน H

H = H – subcircuit – จุดโดดเดี่ยว

Circuit = circuit + วงจรย่อยที่จุดที่เหมาะสม

End {วงจรเป็นวงจรออยเลอร์}

ตัวอย่างที่ 6.26 ดาบโค้งของโมแฮมเมด (Mohammed's scimitar) เป็นปริศนาหนึ่งที่ให้วาดรูปทรงตามที่กำหนดโดยไม่ยกปากกาเลย ปริศนานี้กำหนดรูปทรงเป็นกราฟคล้ายดาบโค้งของชาวอิสลามดังรูปที่ 6.28 ปริศนานี้หาคำตอบด้วยวงจรและวิถีออย์เลอร์ได้หรือไม่



รูปที่ 6.28 กราฟคล้ายดาบโค้งของชาวอิสลาม

วิธีทำ พิจารณาดีกรีของจุดที่เป็นเลขคู่ทั้งหมด

∴ มีวงจรออยเลอร์ใช้ขั้นตอนวิธีในการหาวงจรออยเลอร์ โดยการ

1. หาวงจร 1 วงจรที่ยาวที่สุดเท่าที่จะทำได้ สมมติทำการเลือกมาวงจรหนึ่ง คือ a,b,d,g,h,j,i,f,e,a
2. ลบเส้นเชื่อมของวงจร ในข้อ 1 ออกไปจาก G และจุดที่โดดเดี่ยวด้วย
3. หาวงจรจากกราฟที่เหลือ โดยเริ่มจากจุดใดก็ได้ที่ใช้ร่วมกันกับวงจรที่ถูกลบออกไป (จะต้องมีอย่างน้อย 1 จุดเพราะเป็นกราฟต่อถึงกัน)

   สมมติเลือก b เป็นจุดเริ่มต้นได้วงจรเป็น b,c,d,f,g,k,h,i,e,b
4. แทรกวงจรในข้อ 3 เข้าไปกับวงจร 1 ได้วงจรใหม่เป็น

   a, b, d, g, h, j, i, f, e, a

   b, c, d, f, g, k, h, i, e, b ∎

6.6.3 **ขั้นตอนวิธีของฟลิวรี**

ขั้นตอนวิธีของฟลิวรี (Fleury ’s algorithm) เป็นขั้นตอนวิธีในการหาวงจรออยเลอร์ ซึ่งมีลำดับของขั้นตอนวิธีดังต่อไปนี้

1. เริ่มที่จุดใด ๆ เลือกเส้นเชื่อมที่จะประกอบเป็นวงจรออยเลอร์
2. ลบเส้นเชื่อมนั้นแล้วเลือกเส้นเชื่อมใหม่โดยมีเงื่อนไขว่า จะต้องต่อถึงกันกับเส้นเชื่อมเส้นสุดท้าย และเมื่อลบแล้วจะต้องไม่ทำให้เกิดการไม่ต่อถึงกัน
3. ทำซ้ำจนกว่า จะลบเส้นเชื่อมออกจากกราฟจนหมด

ทฤษฎีบทที่ 6.7 พหุกราฟต่อถึงกันใด ๆ จะมีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์ก็ต่อเมื่อกราฟนั้นมีจุด 2 จุดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ที่ 6.7 ถ้า กราฟมีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์ จาก a ไป b

$\therefore$ วิถีจะสนับสนุนให้มีจุดที่ 1 อยู่ที่จุดของ a,b

สนับสนุนให้มีจุดที่ 2 อยู่ที่จุดใด ๆ ระหว่าง a กับ b

$\therefore$ ดีกรีของ a,b เป็นเลขคี่ จุดอื่นจะเป็นเลขคู่

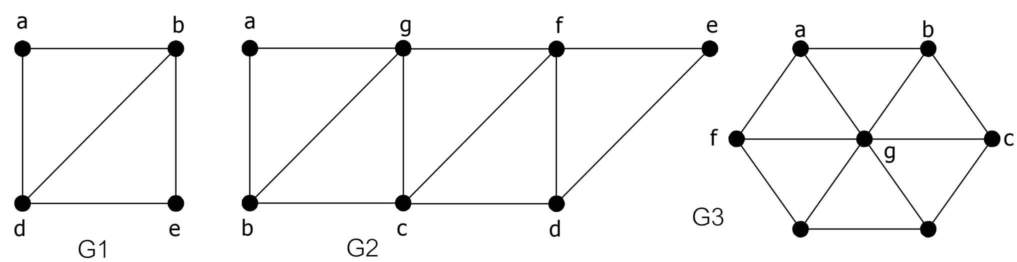
ถ้ากราฟ มี a,b เท่านั้นที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่

$\therefore$ ถ้าเพิ่มเส้นเชื่อมที่เชื่อมต่อระหว่าง a กับ b ทุกจุดจะมีดีกรีเป็นจำนวนคู่

$\therefore$ จะมีวงจรออยเลอร์

ดังนั้น ถ้าลบเส้นเชื่อม {a,b} จะได้วิถีออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 6.27 กราฟต่อไปนี้ มีวิถีออยเลอร์หรือไม่

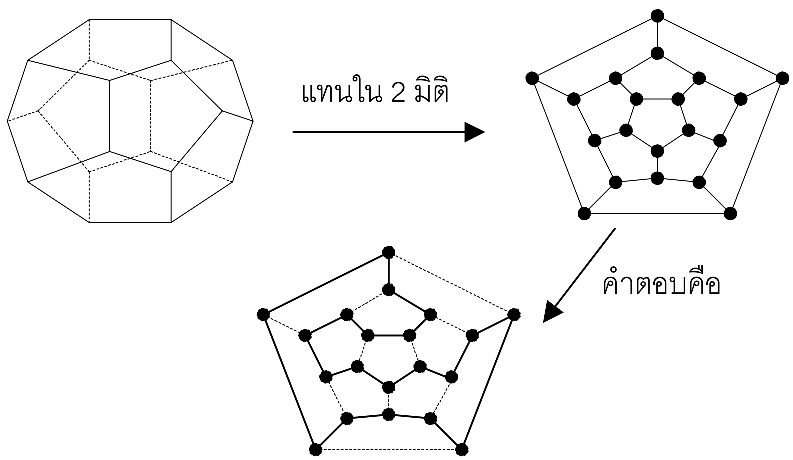


วิธีทำ กราฟ G1 มี 2 จุดที่มีดีกรีคี่ กล่าวคือ b และ d จากเหตุนี้ทำให้มีวิถีออยเลอร์ ที่มี b และ d เป็นจุดสุดท้าย ส่วนกราฟ G2มี 2 จุดที่มีดีกรีคี่ กล่าวคือ b และ f ดังนั้นจึงมีวิถีออยเลอร์ที่มี b และ f เป็นจุดสุดท้าย ส่วนกราฟ G3 ไม่มีวิถีออยเลอร์เนื่องจากมี 6 จุดที่มีดีกรีคี่ ∎

6.6.4 วิถีแฮมิลตันและวงจรแฮมิลตัน

นิยามที่ 6.16 วิถี $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},x_n$ ในกราฟ G = (V,E) เป็นวิถีแฮมิลตัน (Hamilton paths) ถ้า V= $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ และ $x_i \neq x_j$ สำหรับ $0 \leq i < j \leq n$ และวงจร $x_0,x_1,\ldots,x_n, x_0$ จะเรียกว่าวงจรแฮมิลตัน (Hamilton circuit) ถ้า $x_0,x_1,\ldots,x_n$ เป็นวิถีแฮมิลตัน

นิยามดังกล่าวมาจากปริศนาแฮมิลตัน กำหนดรูปทรงซึ่งมี 12 หน้า แต่ละหน้าเป็นห้าเหลี่ยม ถ้าให้จุดแทนเมืองต่าง ๆ ในโลก (มี 20 จุด) จะมีวิธีเดินทางไปยังเมืองต่าง ๆ แล้วกลับมาที่เดิมได้อย่างไร



รูปที่ 6.29 ปริศนาแฮมิลตัน

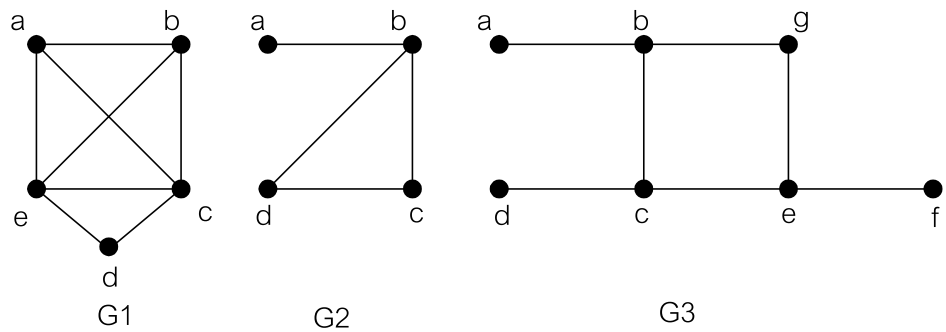
ที่มา(วิทยา วัชระวิทยากุล และสมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล, 2536, หน้า188-189)

การตรวจสอบว่ากราฟมีวงจรแฮมิลตันหรือไม่ ทำได้ด้วยการตรวจสอบว่าไม่มีเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงสำหรับวงจรแฮมิลตันที่มีอยู่

ข้อสังเกต

1. ถ้ากราฟมีจุดดีกรี 1 จะไม่มีวงจรแฮมิลตัน
2. เส้นเชื่อมที่ติดกับ จุดดีกรี 2 จะต้องอยู่ในวงจรแฮมิลตันใด ๆ (ถ้ามี)
3. ขณะที่สร้างวงจรแฮมิลตัน เมื่อวิถีผ่านจุดใด เส้นเชื่อมอื่น ๆ ที่ติดกับจุด นั้น ๆ สามารถตัดออกไปได้
4. วงจรแฮมิลตันจะไม่บรรจุวงจรแฮมิลตันที่เล็กกว่า

ตัวอย่างที่ 6.28 พิจารณากราฟต่อไปนี้ว่ามีวิถีแฮมิลตันและวงจรแฮมิลตันหรือไม่



วิธีทำ

กราฟ G1 มีวงจรแฮมิลตัน คือ a, b, c, d, e, a กราฟ G2 ไม่มีวงจรแฮมิลตัน เพราะทุก ๆ จุดต้องผ่านเส้นเชื่อม {a,b} สองครั้ง แต่ G2 มีวิถีแฮมิลตัน คือ a,b,c,d ส่วน G3 ไม่มีทั้งวงจรแฮมิลตันและวิถีแฮมิลตัน เพราะบางวิถีของทุก ๆ จุดต้องผ่านเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งของ {a,b}, {e,f} และ {c,d} มากกว่า 1 ครั้ง ▮

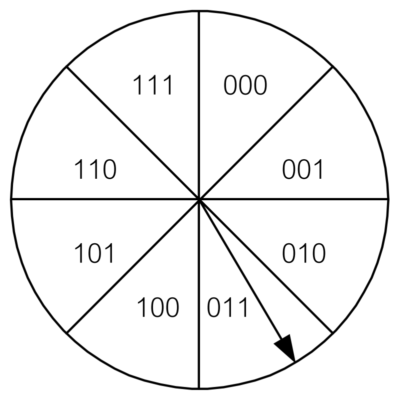
ตัวอย่างที่ 6.29 K_n, $n \geq 3$ มีวงจรแฮมิลตันเสมอเพราะทุกคู่ของจุดใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมต่อถึงกันเสมอ ▮

ทฤษฎีบทที่ 6.8 ถ้า G เป็นกราฟธรรมดาที่ต่อถึงกัน ซึ่งมี n จุด เมื่อ $n \geq 3$ แล้ว G จะมีวงจรแฮมิลตัน ถ้าดีกรีของแต่ละจุด $\geq n/2$

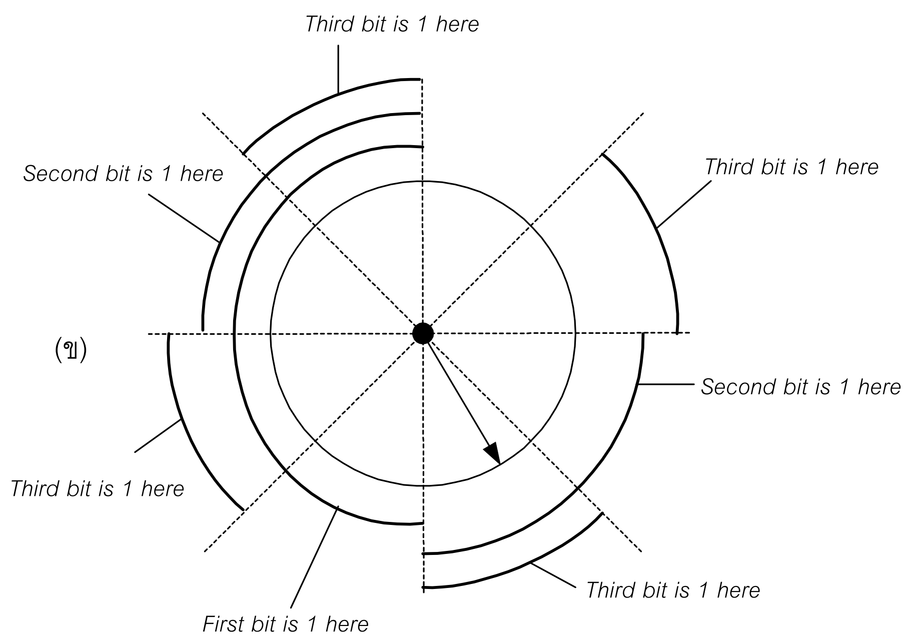
6.6.5 รหัสเทา

รหัสเทา (gray code) เป็นการนำเอาตำแหน่งของเข็มซึ่งหมุนชี้ไปตามเส้นทางรอบวงของวงกลมสามารถจะนำเอามาแทนรูปแบบที่เป็นดิจิทัล โดยการแบ่งเส้นรอบวงออกเป็น 2^n ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 6.30 รูป (ก) $2^3 = 8$ ส่วน แต่ละส่วนจะแทนสายอักขระของบิตขนาด = n บิต ดังรูปที่ 6.30 รูป (ข) บิตขนาด 3 บิต

(ก)



(ข)



รูปที่ 6.30 การแทนดิจิทัลของตำแหน่งตัวชี้

ที่มา(Rosen, 1997, p.481-482)

การแทนเมื่อมีการติดต่อเท่ากับ n

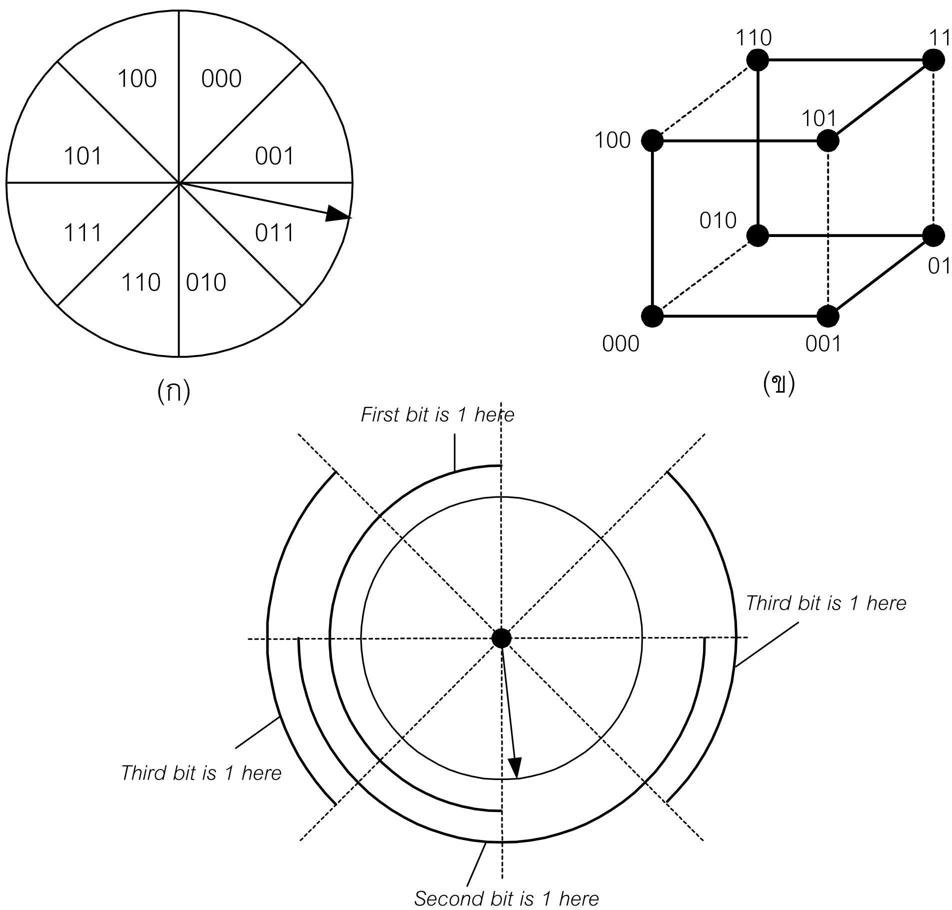
1. ปัญหาเกิดขึ้นเมื่อเข็มชี้อยู่ใกล้เขตกั้นของแต่ละส่วนเพราะถ้าอ่านพลาดจะทำให้ผิดไปหลาย ๆ บิต (อาจจะทุกบิต)

2. รหัสเทาได้จัดเรียงการแทนใหม่ โดยให้ส่วนที่อยู่ใกล้ชิดกันจะแทนบิตซึ่งต่างกันเพียง 1 ตำแหน่งเท่านั้นดังรูปที่ 6.31 รูป (ก)

3. สามารถจะใช้แบบจำลองรหัสเทาโดยใช้ลูกบาศก์ขนาด n, Q_n

4. ปัญหาของรหัสเทาเป็นเพียงการหาวงจรแฮมิลตันเท่านั้น

5. ในรูปที่ 6.31 รูป (ข) จะแสดงรหัสเทาโดยใช้วงจรแฮมิลตันของ Q_3

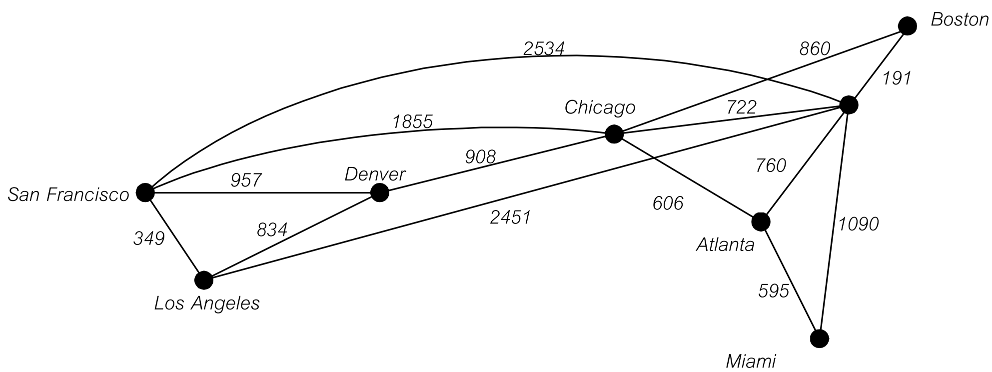


รูปที่ 6.31 การใช้รหัสเทาเพื่อวงจรแฮมิลตันของ Q_3

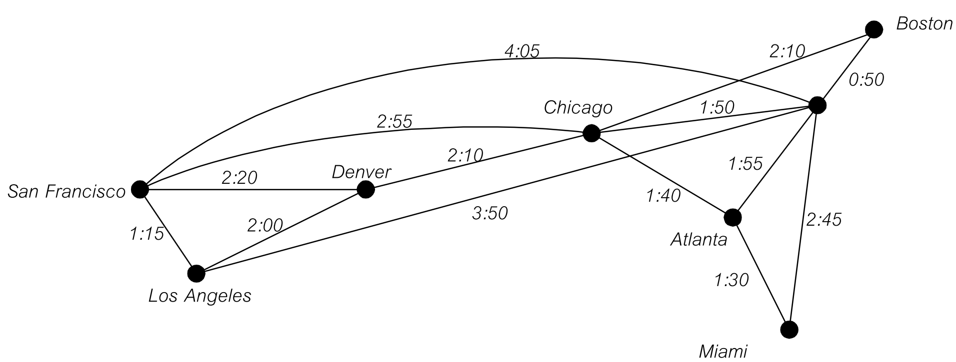
ที่มา(Rosen, 1997, p.481-483)

6.7 ปัญหาวิถีสั้นที่สุด

ปัญหาหลายอย่างสามารถจะสร้างแบบจำลองโดยใช้กราฟได้เช่น การเดินทาง การขนส่ง และเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ปัญหาดังกล่าวจะเกี่ยวข้องกับการหาเส้นทางซึ่งใช้เวลาน้อยที่สุด ใช้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ระยะทางสั้นที่สุด และใช้เวลาตอบสนองน้อยที่สุด แบบจำลองสามารถทำได้โดยใช้กราฟให้น้ำหนักซึ่งจะกำหนดเส้นเชื่อมลงไปด้วย อาทิ การให้น้ำหนักเส้นเชื่อมของระยะทาง ดังรูปที่ 6.32, การให้น้ำหนักเส้นเชื่อมของเวลา ดังรูปที่ 6.33 และการให้น้ำหนักเส้นเชื่อมของค่าใช้จ่าย เป็นต้น การหาวิถีสั้นที่สุดจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งตามวิถีของเส้นเชื่อมสามารถทำได้โดยวิธีต่อไปนี้



รูปที่ 6.32 การให้น้ำหนักเส้นเชื่อมของระยะทาง

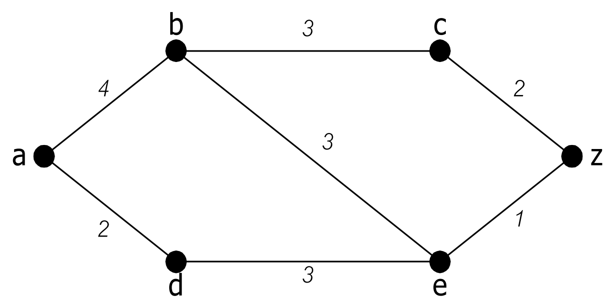


รูปที่ 6.33 การให้น้ำหนักเส้นเชื่อมของเวลา

6.7.1 **ขั้นตอนวิธีในการหาวิถีสั้นที่สุด**

ขั้นตอนวิธีในการหาวิถีสั้นที่สุดมีหลายวิธี แต่ที่รู้จักแพร่หลายมากวิธีหนึ่งคือขั้นตอนวิธีของดิจสตรา (Dijkstra's algorithm) การหาวิถีสั้นที่สุดอาจจะหาได้ด้วยวิธีการตรวจสอบ แต่ค่อนข้างจะยุ่งยากและไม่เหมาะที่จะนำมาใช้งาน โดยเฉพาะงานที่มีจุดและวิถีจำนวนมาก

ตัวอย่างที่ 6.30 จงหาขนาดของการหาวิถีสั้นที่สุดจาก a ไป z ในกราฟระบุน้ำหนักต่อไปนี้



1. พิจารณาวิถีเริ่มที่ a มี ขนาดของ ab = 4 และขนาดของ ad = 2 ดังนั้น d ใกล้ a ที่สุด
2. หาจุดถัดไปที่ต่อถึงได้โดยการหาวิถีที่ผ่าน a และ d ได้ ab = 4, ade = 5

   $\therefore$ b ใกล้ a ที่สุด
3. หาจุดถัดไปที่ต่อถึงได้โดยการหาวิถีที่ผ่าน a,d และ b ได้ abc = 7, abe = 7, ade = 5

   $\therefore$ e ใกล้ a ที่สุด
4. หาจุดถัดไปที่ต่อถึงได้โดยการหาวิถีที่ผ่าน a,d,b และ e ได้ abcz = 9, abez = 8, adez = 6

   $\therefore$ adez = 6 เป็นวิถีสั้นที่สุด ▮

6.7.2 ขั้นตอนวิธีของดิจสตรา

สมมติต้องการจะหาวิถีสั้นที่สุดจาก a ไป z จะมีขั้นตอนวิธีดังนี้ (Johnsonbaugh, 1984, p.128 -129)

1. ให้จุด a = 0 , จุดอื่น ๆ ∞

   $L_0(a) = 0$, $L_0(V) = \infty$ (แทนขนาดของวิถีจาก a ถึง จุดนั้น ๆ)

2. สร้างสิ่งที่สังเกตได้จากเซต S ของจุดต่างๆแทนด้วย S_k

   แต่ $S_0 = \varnothing$

   $S_k = S_{k-1} \cup \{u\}$ เมื่อ u เป็นจุดที่ $\notin S_{k-1}$ ซึ่งมีค่าน้อยที่สุด

3. แก้ไขค่าของทุก ๆ จุดซึ่ง $\notin S_k$ จะได้

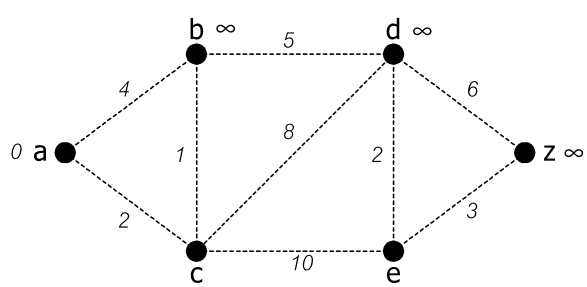
   $L_k(v) =$ ค่าของจุด v ที่ซ้ำ K

   = { ขนาดของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไป v
   ซึ่งผ่าน เฉพาะจุดที่ $\in S_k$ เท่านั้น
   วิถีสั้นที่สุดจาก a ไป u ที่มีการซ้ำครั้งที่ k-1
   และเพิ่มเส้นเชื่อม (u,v)

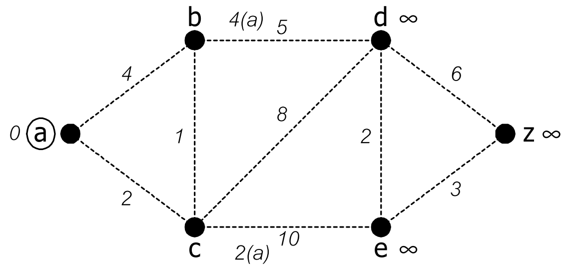
   หรือ $L_k(a,v) =$ ค่าน้อยที่สุด $\{L_{k-1}(a,v), L_{k-1}(a,u)+w(u,v)\}$

4. ทำซ้ำไปจนกว่าจุด z จะถูกเพิ่มเข้าไปใน S_k ก็จะได้วิถีสั้นที่สุดจาก a ไป z

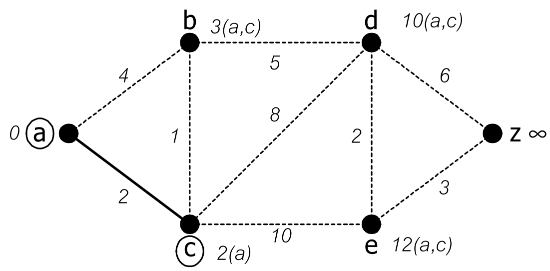
ตัวอย่างที่ 6.31 ใช้ขั้นตอนวิธีของดิจสตรา ในการหาขนาดของวิถีสั้นที่สุดระหว่าง a และ z ในกราฟต่อไปนี้



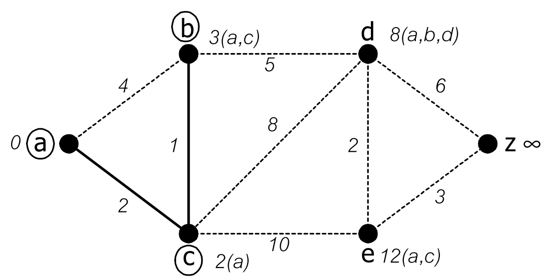
ค่าต่ำสุดคือ a



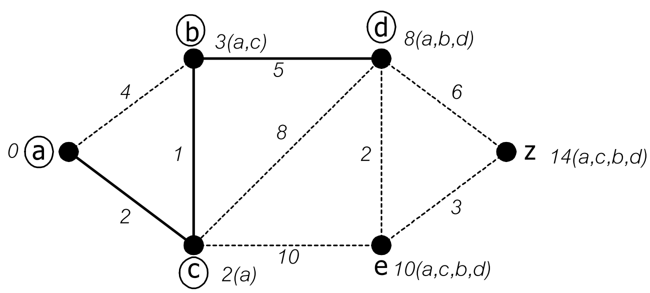
เพิ่ม a เข้าไปใน S โดยการ S={a} แล้ว คำนวณค่าใหม่ทุกจุดที่เส้นเชื่อมต่อกัน แต่มีเพียง 2 เส้นเท่านั้นคือ b วิถี 4,c วิถี 2 นอกนั้น ∞



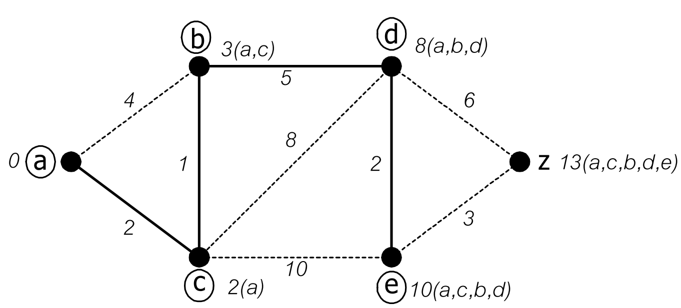
เลือกเส้นเชื่อม c เพิ่ม c เข้าไปใน S โดยการ S={a,c} มีเส้นเชื่อมที่ต่อกันกับจุดได้อีก 3 จุดคือ b,d,e จุดที่เชื่อมต่อกันไม่ได้วิถี = ∞



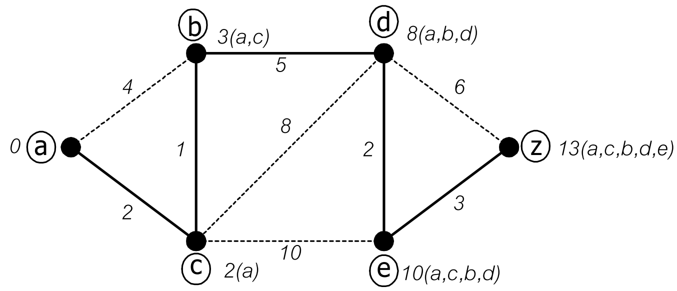
เนื่องจาก S={a,c} พิจารณาเลือก จุด b (วิถีสั้นที่สุด =3) ผ่านจุด a,c,b และเพิ่ม b เข้าไปใน S มีเส้นเชื่อมที่ต่อกันกับจุดได้อีก 2 จุดคือ d,e



เนื่องจาก S={a,c,b} พิจารณาเลือก จุด d (วิถีสั้นที่สุด =8) ผ่านจุด a,c,b,d และเพิ่ม d เข้าไปใน S



เนื่องจาก S={a,c,b,d} พิจารณาเลือกจุด e (วิถีสั้นที่สุด =10) ผ่านจุด a, c, b, d, e และเพิ่ม e เข้าไปใน S



ได้วิถีสั้นที่สุดขนาด = 13 ผ่านจุด a-c-b-d-e-z ∎

ทฤษฎีบทที่ 6.9 ขั้นตอนวิธีของดิจสตราจะให้วิถีสั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดใด ๆ ในน้ำหนักของกราฟไม่ระบุทิศทางที่ต่อถึงกันธรรมดา

ทฤษฎีบทที่ 6.10 ขั้นตอนวิธีของดิจสตราใช้ $O(n^2)$ ตัวดำเนินการ

จำนวนการทำซ้ำไม่เกิน $n-1$ ครั้ง

ในแต่ละการทำซ้ำใช้การเปรียบเทียบไม่เกิน $n-1$ ครั้ง

ใช้การบวกไม่เกิน $n-1$ ครั้ง

$\therefore$ ผลรวมการใช้ตัวดำเนินการใน 1 การทำซ้ำไม่เกิน $2(n-1)$ ครั้ง

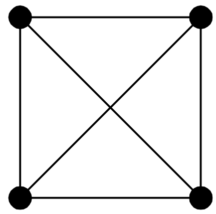
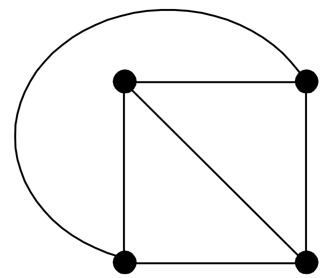
$\therefore$ ผลรวมตัวดำเนินการไม่เกิน $(n-1)2(n-1) = O(n^2)$ ครั้ง

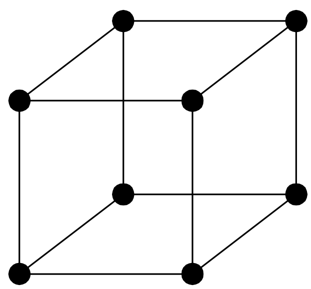
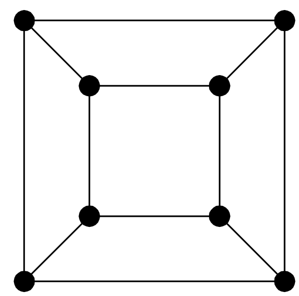
6.8 กราฟระนาบ

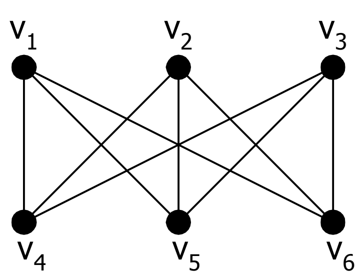
กราฟระนาบ (Planar Graph) เกี่ยวข้องการเขียนกราฟในแนวราบ ซึ่งจะไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันเลย หรือการแทนกราฟในแนวราบในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเส้นเชื่อมจะไม่มีการไขว้กัน

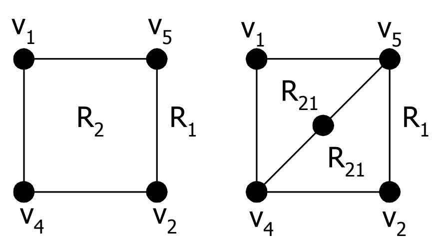
นิยามที่ 6.17 กราฟจะเรียกว่ากราฟระนาบ ถ้าสามารถจะเขียนในแนวราบโดยที่ไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันเลย วิธีการเขียนกราฟนี้จะเรียกว่าการแทนระนาบของกราฟ กราฟอาจจะเป็นระนาบแม้ว่าจะมีเส้นเชื่อมไขว้กันเพราะอาจจะเขียนแบบอื่น โดยไม่ไขว้กันได้

ตัวอย่างที่ 6.32 กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟระนาบหรือไม่

K_4  เป็น 

Q_3  เป็น 

$K_{3,3}$ 

ไม่เป็น 

6.8.1 **สูตรของออยเลอร์**

สูตรของออยเลอร์ (Euler formula) กล่าวว่ากราฟระนาบจะแบ่งระนาบออกเป็นขอบเขตซึ่งจะไม่มีเขตกั้นขอบเขตรวมอยู่ด้วย และกราฟระนาบในรูปแบบต่าง ๆ ของกราฟเดียวกัน จะแบ่งจำนวนขอบเขตได้เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 6.33 สูตรของออยเลอร์ ให้ G เป็น กราฟระนาบธรรมดาที่ต่อถึงกัน ซึ่งมีเส้นเชื่อม e และจุด v ให้ r = จำนวนขอบเขต จะได้ว่า $r = e-v+2$

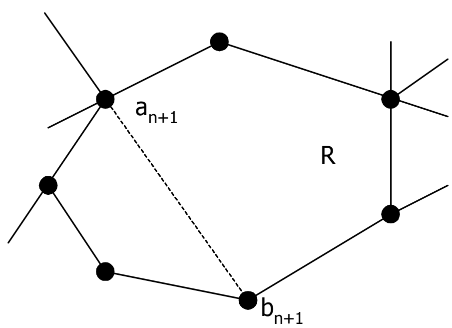
สร้างกราฟย่อย $G_1, G_2, \ldots G_e = G$ โดยการเพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปทีละ 1 เส้น โดยที่จะต้องติดกับ v ใน G_{n-1} ใช้ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เป็นครั้งที่ e=1 $r_1 = e_1 - v_1 + 2$

ให้เป็นจริงที่ n $r_n = e_n - v_n + 2$, G_n เป็นกราฟระนาบ

ต้องแสดงให้เห็นว่า G_{n+1} เป็นจริง

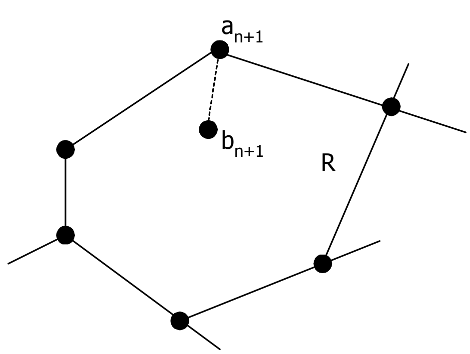
เพิ่มเส้นเชื่อม 1 เส้นเข้าไปใน G_n ซึ่งจะมี 2 กรณี



รูปที่ 6.34 การเพิ่มเส้นเชื่อม เข้าไปใน G_n

<u>กรณีที่ 1</u> มี 2 จุดที่ติดกับเส้นเชื่อมใหม่อยู่ใน G_n แล้ว

$\therefore$ ใน G_{n+1} นี้ ขอบเขตเพิ่มขึ้น 1, เส้นเชื่อมเพิ่มขึ้น 1 , จุดไม่เพิ่ม ดังรูปที่ 6.34



รูปที่ 6.35 การเพิ่มเส้นเชื่อม เข้าไปใน G_n

<u>กรณีที่ 2</u> มี 1 จุดที่ไม่อยู่ใน G_n

$\therefore$ ใน G_{n+1} ขอบเขตไม่เพิ่ม, E เพิ่มขึ้น 1 จุดเพิ่มขึ้น 1

$\therefore r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$ ดังรูปที่ 6.35

ตัวอย่างที่ 6.34 กราฟระนาบที่ต่อถึงกัน มี 20 จุดแต่ละจุดมีดีกรี = 3 จงหาว่ากราฟจะแบ่งขอบเขตออกเป็นกี่ส่วน

จำนวนจุด = 20

จำนวนเส้นเชื่อม = 20.3/2 = 30

$\therefore$ จำนวนขอบเขต = e-v+2 = 30 –20 +2 = 12 ▮

ทฤษฎีบทที่ 6.11 ถ้า G เป็นกราฟระนาบธรรมดาที่ต่อถึงกันซึ่งมีจำนวนเส้นเชื่อม e และ จำนวนจุด v ซึ่ง $v \geq 3$ แล้ว $e \leq 3v - 6$

พิสูจน์ที่ 6.11 จะใช้หลักการว่าดีกรีของขอบเขตจะเท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมที่อยู่บนเขตกั้นของขอบเขต

สมมติกราฟระนาบแบ่งขอบเขตออกเป็น R ขอบเขต

และมีดีกรี ≥ 3 ($\because$ deg. < 3 สร้างขอบเขตไม่ได้)

$$\sum_{\text{all region R}} \deg(R) = 2e \geq 3r$$

$$(2/3)e \geq r$$

โดยใช้ $r = e - v + 2$

$$\therefore e - v + 2 \leq (2/3)e$$

$$(1/3)e \leq v - 2$$

$$e \leq 3v - 6$$

ตัวอย่างที่ 6.35 จงแสดงว่า K_5 ไม่ใช่กราฟระนาบ

K_5 มีจำนวนจุด =5, จำนวนเส้นเชื่อม = 10 ซึ่งไม่สอดคล้องกับ $e \leq 3v - 6$

$\therefore$ K_5 ไม่ใช่กราฟระนาบ ▮

ทฤษฎีบทที่ 6.12 ถ้ากราฟระนาบธรรมดาที่ต่อถึงกันมีจำนวน E=e และจำนวน V ด้วย $v \geq 3$ และไม่มีวงจรขนาด = 3 แล้ว $e \leq 2v - 4$

พิสูจน์ที่ 6.12 $2e = \sum_{\text{ทุกๆ}r} \deg(r) \geq 4r$

$2e \geq 4r$ หรือ $e \geq 2r$

$\because r = e - v + 2 \Rightarrow e \geq 2(e - v + 2)$

$e \geq 2e - 2v + 4$

$\therefore e \leq 2v - 4$

ตัวอย่างที่ 6.36 กราฟสองฝ่าย $K_{3,3}$ เป็นกราฟระนาบหรือไม่

$K_{3,3}$ ไม่มีวงจรขนาด = 3

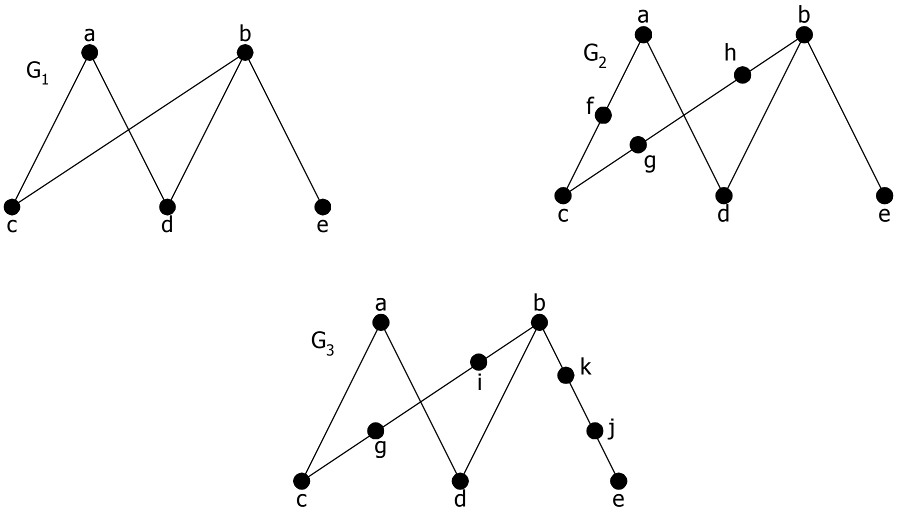
$K_{3,3}$ – มี V.=6, E=9 แต่ V.E ไม่ เป็นไปตามกฎ

$K_{3,3}$ = ไม่เป็นไปตามกฎ $e \leq 2v - 4$ เพราะ 2(6)-4 =8 ซึ่งไม่มากกว่าเท่ากับ 6

$\therefore$ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบ ▮

6.8.2 ทฤษฎีของกูราตอฟสกี

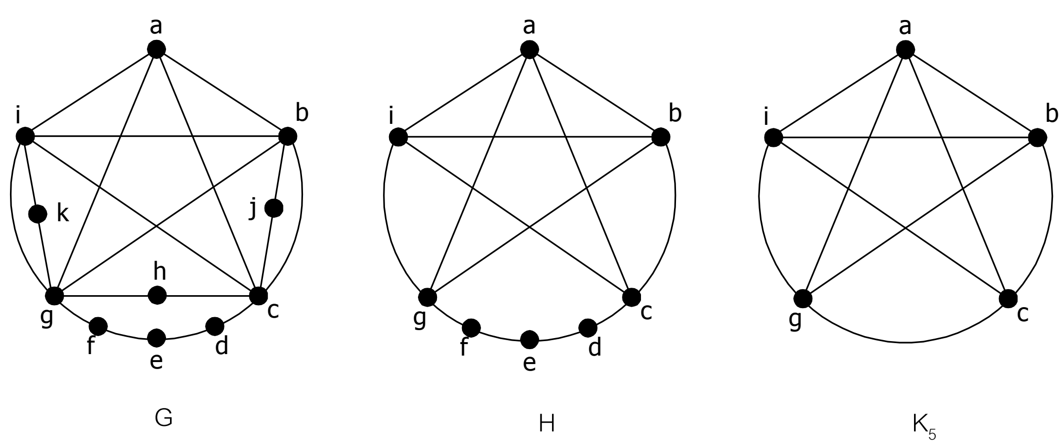
ทฤษฎีของกูราตอฟสกี (Kuratowski's Theorem) เป็นทฤษฎีที่ใช้ตรวจสอบว่ากราฟที่ให้มาเปรียบเทียบกันแล้วเป็นกราฟระนาบหรือไม่ โดยพิจารณาจาก ถ้า $K_{3,3}$, K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบแล้วกราฟที่บรรจุ $K_{3,3}$, K_5 ก็จะไม่เป็นกราฟระนาบ การแบ่งส่วนย่อยของสมาชิกจะเป็นตัวดำเนินการในการลบ E {u,v} แล้ว เพิ่ม w และ E {u,w},{w,v} กราฟจะเป็นกราฟระนาบถ้าทำการแบ่งส่วนย่อยของสมาชิกแล้วยังคงเป็นกราฟระนาบอยู่ กราฟ G_1 (V_1,E_1) และ G_2 (V_2,E) จะเป็นกราฟคล้ายรูปกัน (homeomorphic) ดังตัวอย่างในรูปที่ 6.36 ถ้า G_1 จะสามารถสร้างขึ้นจาก G_2 ซึ่ง G_1 ทำได้โดยการแบ่งส่วนย่อยของสมาชิก



รูปที่ 6.36 กราฟคล้ายรูปกันของ G_1, G_2, G_3

ทฤษฎีบทที่ 6.13 (ทฤษฎีของกูราตอฟสกี (Kuratowski's Theorem)) กราฟใด ๆ จะไม่เป็นกราฟระนาบ ก็ต่อเมื่อมันบรรจุกราฟย่อยซึ่งคล้ายรูปกัน กับ $K_{3,3}$ หรือ K_5

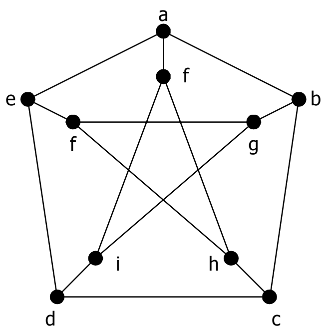
ตัวอย่างที่ 6.37 พิจารณากราฟต่อไปนี้ ว่าเป็นกราฟระนาบหรือไม่



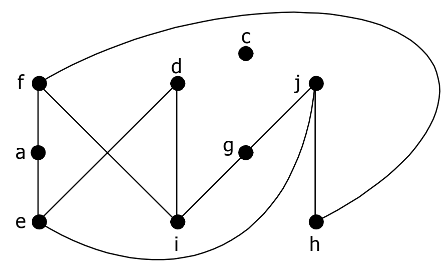
$H \leq G$ และ กราฟ H คล้ายรูปกันกับ K_5

$\therefore$ G ไม่เป็นกราฟระนาบ

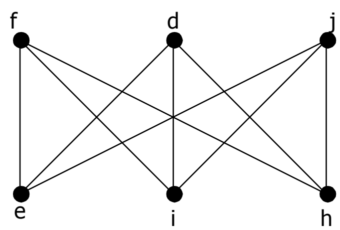
ตัวอย่างที่ 6.38 กราฟของปีเตอร์เสน (Petersen's graph) (วิทยา วัชระวิทยากุล และสมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล, 2536, หน้า 201) ดังต่อไปนี้ เป็นกราฟระนาบหรือไม่



P



H



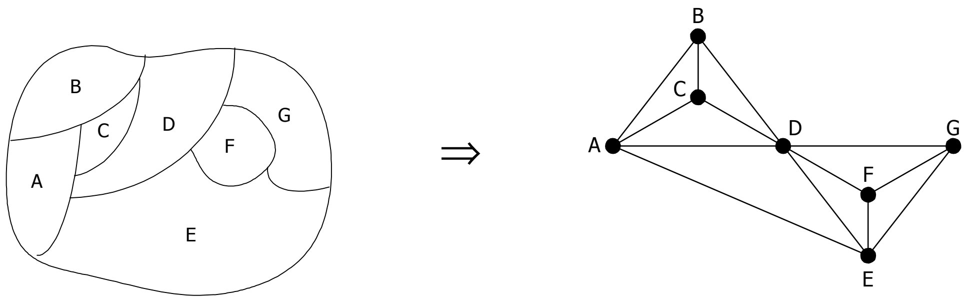
$K_{3,3}$

$H \leq P$ และ กราฟ H คล้ายรูปกันกับ $K_{3,3}$

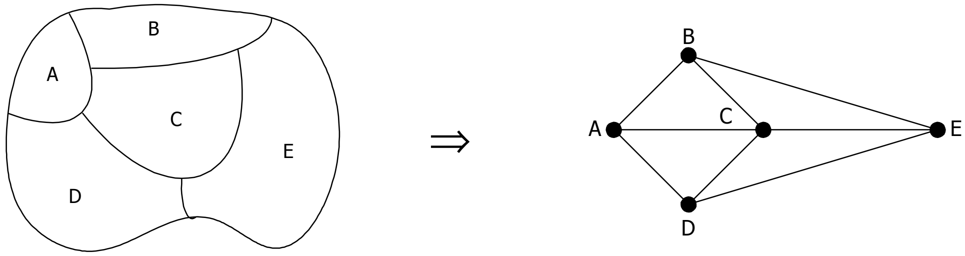
$\therefore$ ไม่เป็นกราฟระนาบ ▌

6.9 การให้สีกราฟ

การให้สีกราฟ (graph coloring) เป็นปัญหาเกี่ยวข้องกับการระบายสีขอบเขตต่าง ๆ ของแผนที่ โดยที่ขอบเขตที่อยู่ติดกันจะต้องมีสีต่างกันและใช้สีน้อยที่สุด ปัญหาดังกล่าวสามารถจะใช้กราฟมา สร้างแบบจำลองได้โดย ให้แต่ละขอบเขตแทนด้วยจุดขอบเขตที่อยู่ติดกันให้มีเส้นเชื่อมจุดนั้น (Rosen, 1995, 509) ดังแสดงในรูปที่ 6.37



แผนที่ 1 กราฟที่ได้จากแผนที่ 1



แผนที่ 2 กราฟที่ได้จากแผนที่ 2

รูปที่ 6.37 แบบจำลองกราฟที่ได้จากแผนที่

นิยามที่ 6.18 การให้สีของกราฟธรรมดาเป็นการกำหนดสีที่จุด โดยที่จุด 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันจะต้องมีสีต่างกัน

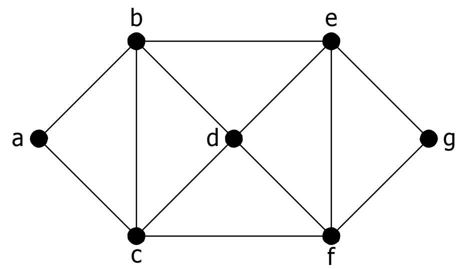
นิยามที่ 6.19 เลขสี (chromatic number) ของกราฟคือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะทำการให้สีกราฟนี้ได้

ข้อสังเกต สิ่งที่จำเป็นในการแสดงว่าเลขสี = n

คือการแสดงว่ากราฟสามารถจะทำการให้สีด้วยสี n สี

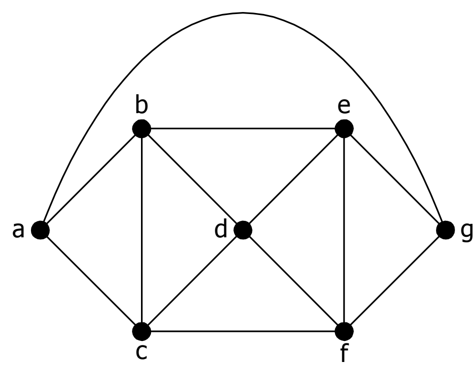
หรือแสดงว่ากราฟไม่สามารถ จะทำการให้สีด้วยสี n – 1 สีได้

ตัวอย่างที่ 6.39 จงหาเลขสีของกราฟต่อไปนี้



จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะทำการให้สีกราฟนี้ได้ = 3

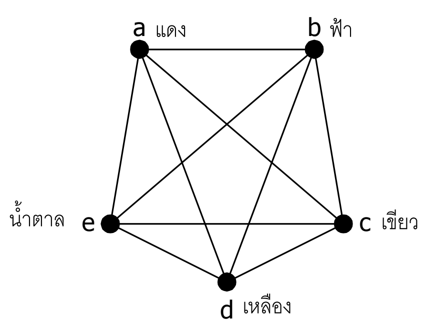
$\therefore$ เลขสี = 3 คือ a,d,g สีแดง , b,f สีฟ้าและ c,e สีเขียว



จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะทำการให้สีกราฟนี้ได้ = 4

$\therefore$ เลขสี = 4 คือ a,d สีแดง, b,f สีฟ้า, c,e สีเขียว และ g สีเหลือง ∎

ตัวอย่างที่ 6.40 จงหาเลขสีของ K_n



รูปที่ 6.38 แสดงสีของ K_5

เพราะว่า K_n 2 จุดใด ๆ จะต่อกัน

∴ จะต้องใช้จำนวนสีในการทำการให้สี K_n = n และไม่สามารถใช้น้อยกว่า n ได้

∴ เลขสี = n ถ้า Kn ใช้ n สี ∵ K_5 จะใช้ 5 สีดังรูปที่ 6.38 ▮

6.9.1 ทฤษฎีสี่สี

ทฤษฎีสี่สี (the four-color theorem) กล่าวว่ากราฟระนาบทุกกราฟ สามารถจะทำการให้สีโดยใช้สีเพียง 4 สีหรือน้อยกว่า * K_n จะไม่เป็นกราฟระนาบถ้า $n \geq 5$

ตัวอย่างที่ 6.41 จงหาเลขสีของกราฟสองฝ่ายบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เมื่อ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

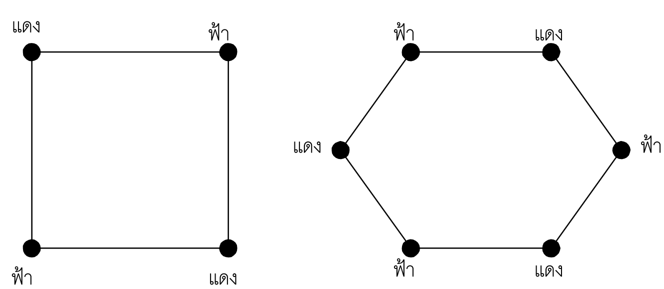
เพราะว่ากราฟสองฝ่ายจะแบ่งเซตของจุดออกเป็น 2 กลุ่ม ซึ่งภายในกลุ่มจะไม่ ต่อถึงกันเลย

∴ ใช้สีเพียง 2 สี เท่านั้น

∴ เลขสี = 2 ▮

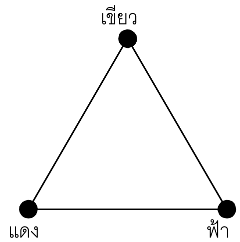
ข้อสังเกต กราฟธรรมดาสองฝ่ายที่ต่อถึงกัน ใด ๆ จะมีเลขสี = 2 หรือถ้าในกราฟเดียวแต่มีเลขสี = 2 กราฟนั้นจะเป็นกราฟสองฝ่าย

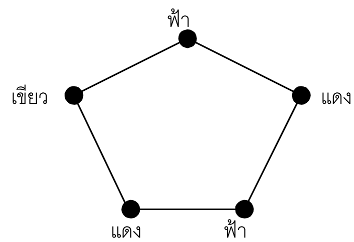
ตัวอย่างที่ 6.42 จงหาเลขสีของกราฟ C_n (วงกลมที่มี n จุด)



พิจารณา $C_4, C_6, C_8, \ldots$ จะเห็นว่าใช้เพียง 2 สีก็พอ

∴ เลขสีของ C_n = 2 สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคู่





พิจารณา $C_3, C_5, C_7, \ldots$ จะเห็นว่า ต้องใช้อย่างน้อย 3 สี

$\therefore$ เลขสีของ $C_n = 3$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่ ▮

6.9.2 การประยุกต์ใช้การให้สีกราฟ

ตัวอย่างที่ 6.43 จัดตารางสอบอย่างไร โดยมีเงื่อนไขว่าไม่มีนักศึกษาคนใดสอบ 2 วิชาพร้อมกัน

วิธีทำ สามารถสร้างแบบจำลองของกราฟได้ดังนี้

ให้ จุด V แทนวิชาที่สอบ และ

E แทนระหว่าง V 2 จุดใด ๆ ถ้ามีนักศึกษาต้องสอบ 2 วิชานั้น ๆ

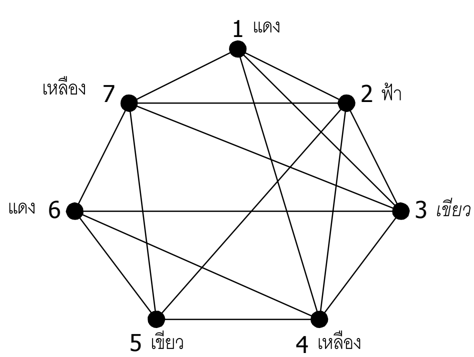
สีของ V แทนจำนวนคาบต่าง ๆ ของเวลาสอบ

ปัญหาจะเปลี่ยนเป็นการให้สีของกราฟ

สมมติ มี 7 วิชา 1,2,…,7 และมี 2 วิชาต่อไปนี้ที่มีนักศึกษาสอบร่วมกัน

1-2,1-3,1-4,1-7,2-3,2-4,2-5,2-7,3-4,3-6,3-7,4-5,4-6,5-6,5-7,6-7

จะได้กราฟดังรูปที่ 6.39



รูปที่ 6.39 แสดงกราฟที่ได้จากการสอบ 7 วิชา

∴ เลขสี = 4 เพราะใช้เพียง 4 สีก็ทำการให้สีกราฟนี้ได้

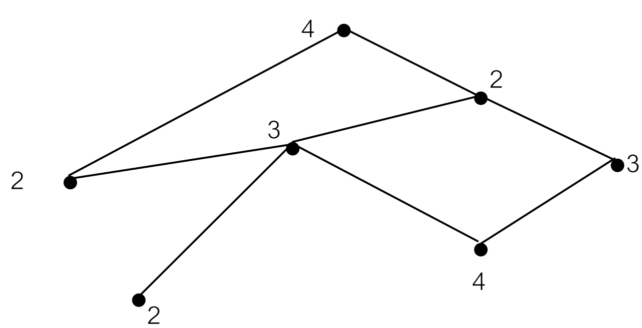
∴ จำนวนคาบมีเพียง 4 ก็พอ ดังตารางที่ 6.2 ▮

ตารางที่ 6.2 แสดงผลลัพธ์การให้สีของจำนวนคาบ วิชาที่สอบ

สี	จำนวนคาบ	สอบวิชา
แดง	1	1,6
น้ำเงิน	2	2
เขียว	3	3,5
น้ำตาล	4	4,7

ตัวอย่างที่ 6.44 การกำหนดความถี่ของสถานีโทรทัศน์ช่อง 2–13 ถูกกำหนดให้ออกอากาศพร้อม ๆ กันได้ แต่เพื่อไม่ให้คลื่นรบกวนกัน จะกำหนดให้สถานีโทรทัศน์ใช้ช่องต่างกัน ถ้าอยู่ในรัศมี 250 กม. จงใช้การให้สีกราฟในการสร้างแบบจำลองของการกำหนดช่องให้กับสถานีโทรทัศน์

1. สร้างกราฟโดยใช้จุดแทนสถานีโทรทัศน์
2. จุด 2 จุดเชื่อมด้วยเส้นเชื่อม ถ้าห่างกัน < 250 กม.
3. ทำการให้สี โดยที่สีแต่ละสีจะแทนช่องต่าง ๆ ▮



รูปที่ 6.40 แบบจำลองของการกำหนดช่องให้กับสถานีโทรทัศน์

ตัวอย่างที่ 6.45 การประมวลผลที่มีการวนซ้ำของเครื่องคอมพิวเตอร์จะทำให้เร็วขึ้นได้ ถ้าตัวแปรที่ถูกใช้บ่อยถูกเก็บไว้ที่ดัชนีเรจิสเตอร์ (index register) ที่อยู่ในหน่วยประมวลผลกลางแทนที่จะเก็บไว้ในหน่วยความจำตามปกติ เมื่อกำหนดการวนซ้ำมาให้ปัญหาคือจะต้องใช้ดัชนีเรจิสเตอร์จำนวนเท่าไร

การสร้างแบบจำลอง ปัญหานี้ทำได้โดยใช้การให้สีกราฟ

ให้ จุดแทนตัวแปรในการวนซ้ำ

และจุด 2 จุดใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมเชื่อมต่อกัน ถ้าตัวแปรนั้นต้องเก็บในเรจิสเตอร์พร้อม ๆ กันขณะประมวลผลในการวนซ้ำ

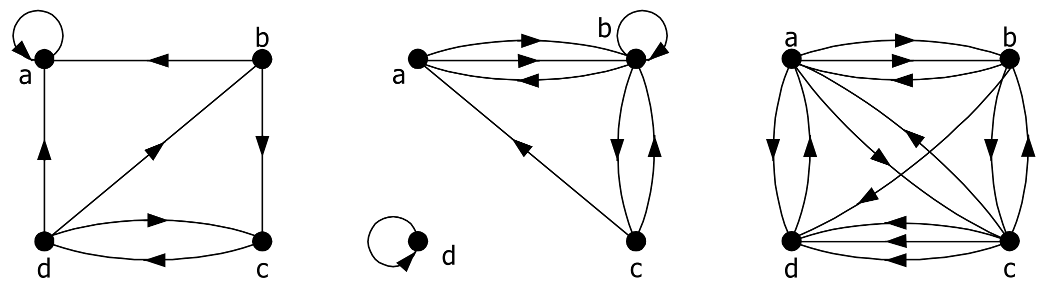
เลขสีจะแทนจำนวนเรจิสเตอร์ที่ต้องใช้เพราะเรจิสเตอร์ที่ต่างกันถูกกำหนดให้กับตัวแปรที่จุดนั้นติดกัน ▌

6.10 สรุป

การประยุกต์ใช้งานกราฟสามารถทำได้หลายอย่าง อาทิ ใช้ตรวจสอบว่าวงจรจะสามารถสร้างขึ้นจริงบนแผงวงจรได้หรือไม่, ใช้บอกความแตกต่างระหว่างสารประกอบเคมี 2 ชนิดที่มีสูตรทางเคมีเหมือนกัน แต่โครงสร้างต่างกัน, ใช้กำหนดการเชื่อมต่อเครือข่ายคอมพิวเตอร์, ใช้ในการหาวิถีสั้นที่สุด (shortest path) ของกระบวนการลำเลียงข้อมูลในระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์, ใช้ในจัดตารางสอบ และใช้ในการกำหนดช่องทีวีให้กับสถานีส่ง เป็นต้น

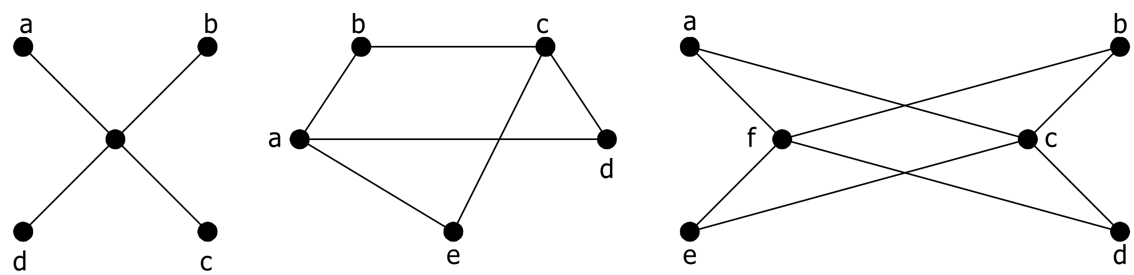
6.11 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. หาจำนวนจุด, จำนวนเส้นเชื่อม, ดีกรีขาเข้า และดีกรีขาออกของพหุกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้



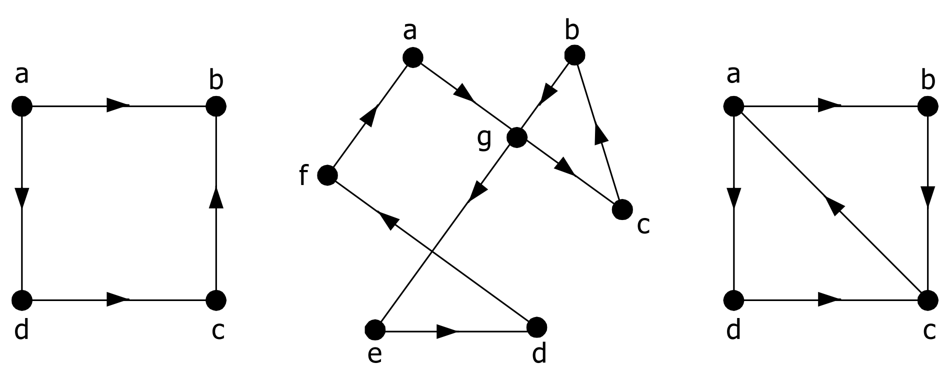
G_1 G_2 G_3

2. กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟสองฝ่ายหรือไม่



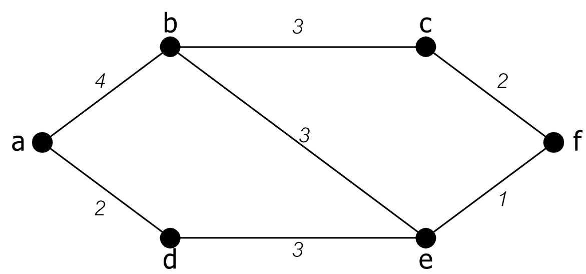
G_1 G_2 G_3

3. กราฟต่อไปนี้ มีวงจรออยเลอร์ และวิถีออยเลอร์หรือไม่

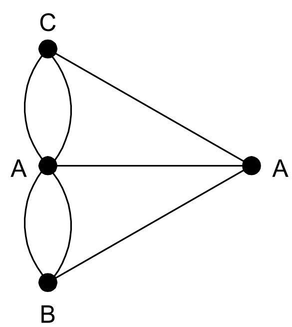


H_1 H_2 H_3

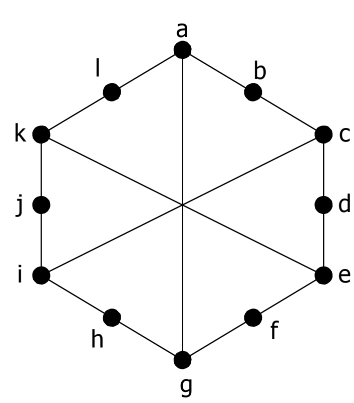
4. จงหาวิถีสั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้ จาก a ไป f



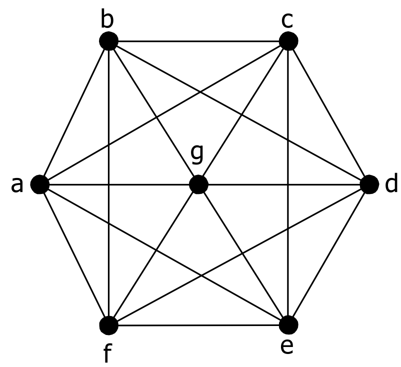
5. กราฟของปัญหาสะพานโคนิกสเบิร์กมีวิถีออยเลอร์หรือไม่



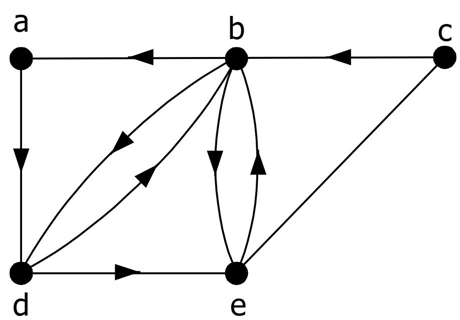
6. พิจารณากราฟว่าเป็นกราฟคล้ายรูปกันกับ $K_{3,3}$ หรือไม่



7. ใช้ทฤษฎีของกูราตอฟสกี ตรวจสอบดูว่ากราฟเป็นกราฟระนาบหรือไม่



8. จงหาวงจรออยเลอร์ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลิวรีจากกราฟที่ให้มา



เอกสารอ้างอิง

วิทยา วัชรระวิทยากุล และสมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. (2536). **คณิตศาสตร์ดิสครีต เชิงประยุกต์ (Discrete Mathematics).** กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชัน.

Johnsonbaugh, Richard, Date. (1984). **Discrete mathematics.** NY: Macmillan Publishing.

Rosen Kenneth H. (1995). **Discrete mathematics and its application** (3^{rd} ed). Singapore: McGraw-Hill.