แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

5.1 ความนำ

5.2 การแทนความสัมพันธ์

5.2.1 การแทนความสัมพันธ์โดยใช้เมทริกซ์

5.2.2 การแทนความสัมพันธ์โดยใช้กราฟระบุทิศทาง

5.3 โคลเชอร์ของความสัมพันธ์

5.3.1 โคลเชอร์

5.3.2 วิถีในกราฟระบุทิศทาง

5.3.3 โคลเชอร์ถ่ายทอด

5.3.4 ขั้นตอนวิธีของวอร์แชล

5.4 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

5.5 ความสัมพันธ์สมมูล

5.5.1 ชั้นสมมูล

5.5.2 ชั้นสมมูลและการแบ่งกั้น

5.6 อันดับย่อย

5.6.1 ลำดับพจนานุกรม

5.6.2 แผนภาพแฮซ

5.6.3 แลตทิซ

5.6.4 โทโพโลจิคอลของการเรียง

5.6.5 ขั้นตอนวิธีของโทโพโลจิคอลการเรียง

5.6.6 สมาชิกค่าสูงสุดและสมาชิกค่าต่ำสุด

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจเรื่องความสัมพันธ์และการแทนความสัมพันธ์ด้วยวิธีต่าง ๆ
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจเรื่องโคลเชอร์ของความสัมพันธ์
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดและความสัมพันธ์สมมูล
4. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้เรื่องอันดับย่อย โพเซต และแลตทิซ
5. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถอธิบายโทโพโลจิคอลของการเรียงได้

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็ปเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท

บทที่ 5
ความสัมพันธ์และการเวียนเกิด

5.1 ความนำ

ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซต มักถูกใช้นำเสนอโครงสร้างที่เรียกว่าความสัมพันธ์ มีการเริ่มสร้างความสัมพันธ์ แล้วจึงแสดงวิธีการหาคำตอบจากความสัมพันธ์นั้น ๆ กระบวนการหาคำตอบจะพิจารณาจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็นก่อน จากนั้นจึงคำนวณหาตามปัญหาที่ต้องการ ความสัมพันธ์นำมาใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่เห็นได้ชัดคือการจัดการฐานข้อมูล ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของวัตถุที่ทำงานภายใต้เงื่อนไขเหมือนกันจัดอยู่ในรูปคู่ลำดับของแถวและคอลัมภ์ นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์อีกแบบคือความสัมพันธ์เวียนเกิด ที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเรื่องอุปนัยทางคณิตศาสตร์ คือเริ่มจากปัญหาที่ไม่ซับซ้อน แล้วพยายามอธิบายกรณีทั่วไปสำหรับปัญหาขนาดใหญ่ ในกรณีที่ปัญหาไม่ซับซ้อนมีขนาดเล็กการคำนวณคงยังใช้คนทำได้ แต่ถ้าปัญหาซับซ้อนมีขนาดใหญ่ต้องอาศัยการประมวลผลจากคอมพิวเตอร์ต่อไป

5.2 การแทนความสัมพันธ์

การแทนรูปแบบของความสัมพันธ์โดยในทางคณิตศาสตร์นอกจากจะเขียนในรูปสัญลักษณ์ของคู่ลำดับแบบแจกแจงแล้วยังสามารถแทนความสัมพันธ์ด้วยเมทริกซ์ และกราฟระบุทิศทางได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

5.2.1 การแทนความสัมพันธ์โดยใช้เมทริกซ์

ความสัมพันธ์สามารถแทนได้โดยการใช้เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง (zero-one matrix) หรือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น สมมติ R เป็นความสัมพันธ์จาก $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ ไป $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ R สามารถจะแทนโดยเมทริกซ์ $M_R = [m_{ij}]$ เมื่อ

$$m_{ij} \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } (a_i,b_j) \in R \\ 0 & \text{ถ้า } (a_i,b_j) \notin R \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 สมมติ A= {1,2,3}, B={1,2} R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

กำหนด $(a,b) \in R$ ถ้า $a > b$

วิธีทำ ให้ a_i, b_j เรียงลำดับตามที่ปรากฏในเซต A และ B

เพราะว่า R = {(2,1),(3,1),(3,2)}

$$\therefore M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

▮

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนด A={a,b,c} และ B={1,2,3,4,5} และความสัมพันธ์ R แทนด้วย

เมทริกซ์ $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ จงหาคู่ลำดับของ R

วิธีทำ R = {(a,2),(b,1),(b,3),(b,4),(c,1),(c,3),(c,5)}

เมทริกซ์ที่ใช้ แทนความสัมพันธ์ R บนเซตใด ๆ จะเป็น เมทริกซ์จตุรัส

R จะมีคุณสมบัติการสะท้อน ถ้าสมาชิกในเส้นทะแยงมุมของ M_R เป็น 1 หมด

R จะมีคุณสมบัติสมมาตร ถ้า M_R เป็นเมทริกซ์สมมาตร $M_R = (M_R)^t$

R จะต่อต้านการสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $(a,b)\in R, (b,a)\in R \leftrightarrow a=b$

หรือ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $(a,b) \notin R \vee (b.a) \notin R$

หรือ ถ้า $i \neq j$ แล้ว $M_{ij} = 0$ หรือ $M_{ji} = 0$ ▮

ตัวอย่างที่ 5.3 พิจารณาความสัมพันธ์ R ซึ่ง แทนด้วย

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ R มีคุณสมบัติการสะท้อน

R มีคุณสมบัติการสมมาตร

R ไม่มีคุณสมบัติต่อต้านการสมมาตร ▮

นิยามที่ 5.1 ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันของความสัมพันธ์ แทนด้วย M_R สามารถหาได้โดยใช้ ตัวดำเนินการบูลีน “และ” กับ”หรือ”

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

R_1 และ R_2 บน A แทนด้วยเมทริกซ์ดังนี้

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \cup R_2 \ : M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \cap R_2 \ : M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ส่วนประกอบของความสัมพันธ์สามารถจะหาได้โดยใช้การดำเนินการทางบูลีนของเมทริกซ์ แทนความสัมพันธ์นั้น

$R : A \rightarrow B$ $\qquad$ $S : B \rightarrow C$ $\qquad$ $S \circ R : A \rightarrow C$

$M_R = \lfloor R_{ij} \rfloor_{m \times n}$ $\qquad$ $M_s = \lfloor S_{ij} \rfloor_{n \times p}$ $\qquad$ $M_{SoR} = \lfloor t_{ij} \rfloor_{m \times p}$

แทนด้วย $M_{SoR} = M_R \odot M_S$

ตัวอย่างที่ 5.4 กำหนด M_R และ M_S จงหา M_{SoR}

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ $M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ▮

5.2.2 การแทนความสัมพันธ์โดยใช้กราฟระบุทิศทาง

การแทนความสัมพันธ์โดยใช้กราฟระบุทิศทาง (directed graph) หรือ ไดกราฟ (digraph) สมาชิกแทนด้วยจุด ส่วนคู่ลำดับแทนด้วยเส้นเชื่อม 2 จุดกำหนดทิศทางด้วยหัวลูกศร

นิยามที่ 5.2 กราฟระบุทิศทาง ประกอบด้วยเซตของ จุด (vertex: V) และเซตของเส้นเชื่อม (edge: E หรือ arc) ซึ่งเชื่อมสมาชิกของ V ในลักษณะคู่ลำดับ $a, b \in V$ เส้นเชื่อม $(a, b) \in E$

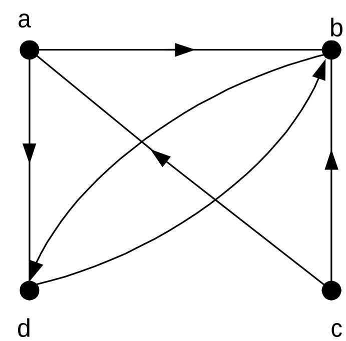
จุดสิ้นสุด

จุดเริ่มต้น

เส้นเชื่อม (a,a) จะเรียกว่าการวนซ้ำ (loop) ถ้าเป็นเส้นเชื่อมจาก a กลับมาที่ a อีก

ตัวอย่างที่ 5.5 จงแสดงกราฟระบุทิศทางของ V = {a,b,c,d} และ E = {(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,b)}

วิธีทำ แสดงกราฟระบุทิศทางของ V ได้ดังรูปที่ 5.1 ▌

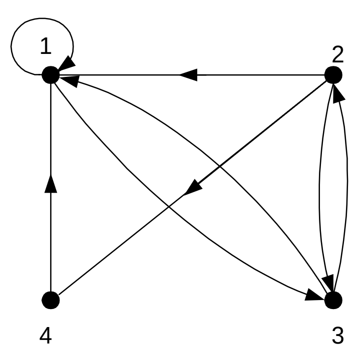


รูปที่ 5.1 กราฟระบุทิศทางจากที่ได้จาก V และ E

ตัวอย่างที่ 5.6 จงเขียนรูปของกราฟระบุทิศทางซึ่งแทน R บนเซต {1,2,3,4}

กำหนด R={(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)}

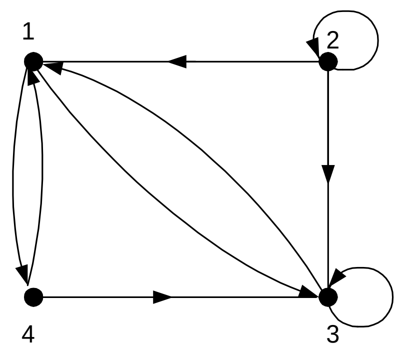
วิธีทำ แสดงกราฟระบุทิศทางของ R ได้ดังรูปที่ 5.2 ▌



รูปที่ 5.2 กราฟระบุทิศทางของ R บนเซต {1,2,3,4}

ตัวอย่างที่ 5.7 จงแสดง R ในรูปของเซตของคู่ลำดับ จากกราฟระบุทิศทางจากรูปที่ 5.3 หากกำหนดให้ R={(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)}

วิธีทำ แสดงกราฟระบุทิศทางของ R ได้ดังรูปที่ 5.3 ▮



รูปที่ 5.3 ตัวอย่างกราฟระบุทิศทาง

ข้อสังเกต คุณสมบัติของ R จากกราฟระบุทิศทาง

1. การสะท้อนสังเกตจากจะมีการวนซ้ำทุก ๆ เซตของจุด
2. การสมมาตรสำหรับทุก ๆ คู่ ของเซตของจุด จะมี 2 เส้นเชื่อมในทิศทางตรงข้าม หรือไม่มีเลย
3. การต่อต้านการสมมาตรทุกคู่ของเซตของจุด จะไม่มี 2 เส้นเชื่อมในทิศทางตรงกันข้าม
4. การถ่ายทอดถ้ามีเส้นเชื่อม จาก x⟶y และ เส้นเชื่อมจาก y⟶z แล้ว จะมี เส้นเชื่อม จาก x⟶ z มี เส้นเชื่อมจัดรูปเป็น △ ในทิศทางที่สอดคล้องกับการถ่ายทอด

5.3 โคลเชอร์ของความสัมพันธ์

โคลเชอร์ของความสัมพันธ์เป็นความสัมพันธ์ที่ได้รับการถ่ายทอดจากเซตที่มีความสัมพันธ์อีกต่อหนึ่ง การประยุกต์ใช้ในศาสตร์ทางคอมพิวเตอร์จะเป็นการเหมารวมของเซต 2 เซตให้อยู่ในกลุ่มความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกัน โดยประกอบด้วยหัวข้อที่ต้องศึกษาต่อไปนี้

5.3.1 โคลเชอร์

ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A , R มีคุณสมบัติ P เป็นการสะท้อน และ/หรือ สมมาตร และ/หรือ ถ่ายทอด หรืออาจจะไม่มีก็ได้ ถ้ามีความสัมพันธ์ S ซึ่งมีคุณสมบัติ P และ S อยู่ใน R แล้ว S จะเรียกว่าเป็นโคลเชอร์ของ R โดยขึ้นตรงกับ P (สุวิมล ฮอลล์, 2542, หน้า 8)

ตัวอย่างที่ 5.8 ความสัมพันธ์ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ บนเซต $A=\{1,2,3\}$

วิธีทำ แสดงกราฟระบุทิศทางของ R ได้ดังรูปที่ 5.2

R ไม่เป็นการสะท้อน ถ้าเพิ่ม (2,2),(3,3) R จะมีคุณสมบัติการสะท้อน

$S = R\cup\{(2,2),(3,3)\}$ จะเป็นโคลเชอร์สะท้อนของ R

$S = R\cup\Delta$ เมื่อ $\Delta=\{(a,a) \mid a\in A\}$ จะเป็นโคลเชอร์สะท้อนของ R , Δ เรียกว่าความสัมพันธ์เชิงทะแยงมุม (diagonal relation) ▌

ตัวอย่างที่ 5.9 $R = \{(a,b) \mid a<b\}$ บนเซตของจำนวนเต็ม จงหาโคลเชอร์สะท้อนของ R

วิธีทำ โคลเชอร์สะท้อนของ R = $R\cup\Delta = \{(a,b) \mid a<b\} \cup \{(a,a) \mid a\in z\}$

$= \{(a,b) \mid a\leq b\}$ ▌

นิยามที่ 5.3 (โคลเชอร์สมมาตร (symmetric closure)) S เป็นโคลเชอร์สมมาตรของ R เมื่อ S เป็นเซตที่เล็กที่สุด ซึ่ง $R\subseteq S$ และ S มีสมบัติสมมาตร

ตัวอย่างที่ 5.10 $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ บน $\{1,2,3\}$ ไม่มีคุณสมบัติสมมาตร

วิธีทำ ถ้าเพิ่ม (2,1),(1,3) จะมีคุณสมบัติสมมาตร

$S = R\cup\{(2,1),(1,3)\}$ มีคุณสมบัติสมมาตรและเป็นเซตที่เล็กที่สุด

ซึ่ง $R\subseteq S$

$\therefore$ S เป็นโคลเชอร์สมมาตร ของ R

การหาโคลเชอร์สมมาตรทำได้โดยการเพิ่ม (b,a) สำหรับ $(a{\cdot}b)\in R$

$\therefore$ โคลเชอร์สมมาตรสร้างได้โดย $R\cup R^{-1}$ เมื่อ $R^{-1} = \{(b,a)|(a,b)\in R\}$ ∎

ตัวอย่างที่ 5.11 $R=\{(a,b)|a>b\}$ บนเลขจำนวนเต็มบวก จงหาโคลเชอร์สมมาตรของ R

วิธีทำ $\therefore R^{-1} = \{(b,a)|a>b\}$

$R\cup R^{-1} = \{(a,b)|a>b\} \cup \{(b,a)|a>b\}$

$= \{(a,b)|a\neq b\}$ เป็นโคลเชอร์สมมาตร ∎

5.3.2 วิถีในกราฟระบุทิศทาง

วิถีในกราฟระบุทิศทาง (paths in directed graphs) มีนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

นิยามที่ 5.4 วิถีจาก a ไป b ในกราฟระบุทิศทาง G คือ ลำดับของเส้นเชื่อม $(x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n)$ ใน G เมื่อ $x_0=a$ และ $x_n=b$ วิถีนี้จะแทนด้วย $x_0,x_1,x_2,\ldots, x_{n-1}, x_n$ ขนาด = n ถ้า x_0 และ x_nเป็นตัวเดียวกัน จะเรียกวงจร (circuit)

ทฤษฎีบทที่ 5.1 R เป็นความสัมพันธ์บน A จะมีวิถีขนาด = n จาก a ไป b ก็ต่อเมื่อ $(a,b)\in R^n$

พิสูจน์ที่ 5.1 ใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

1. n=1 เป็นจริง เพราะ $(a.b) \in R \leftrightarrow$ มีวิถี จาก a ไป b

2. สมมติ เป็นจริง ที่ n นั่นคือ $(a,b) \in R^n \leftrightarrow$ มีวิถีจาก a ไป b ขนาด = n

ต้องพิสูจน์ว่า เป็นจริงที่ n+1 นั่นคือ $(a,b) \in R^{n+1} \leftrightarrow$ มีวิถี a ไป b ขนาด n+1 มีวิถี a ไป b ขนาด n+1 $\leftrightarrow$ มี c ซึ่งวิถี a ไป c ขนาด =1 และวิถี c ไป b ขนาด=n

$\leftrightarrow (a,c) \in R$ และ $(c,b) \in R^n$

$\leftrightarrow (a,b \in R^n oR)$

$\leftrightarrow (a,b) \in R^{n+1}$

$\therefore$ เป็นจริงที่ n+1

5.3.3 โคลเชอร์ถ่ายทอด

โคลเชอร์ถ่ายทอด (transitive closures) มีนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

นิยามที่ 5.5 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A การเชื่อมต่อความสัมพันธ์ R^* ประกอบด้วยคู่ลำดับ (a,b) ซึ่งมีวิถีระหว่าง a และ b ใน R

$\because R^n$ ประกอบด้วยคู่ลำดับ (a,b) ซึ่งมีวิถีขนาด n จาก a ไป b จะได้ว่า

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

ตัวอย่างที่ 5.12 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของคนทั้งหมดในโลก R จะมี (a,b) ที่ a ได้พบกับ b จงหา $R^n, n > 2$ และ R^*

วิธีทำ R^n จะประกอบด้วยคู่ลำดับ (a,b) ซึ่งจะมีคน $x_1,x_2,\ldots x_{n-1}$ โดยที่ a ได้พบกับ x_1,x_1 ได้พบกับ $x_2,\ldots,x_{n-1}$ ได้พบกับ b

R^* จะประกอบด้วย (a,b) ถ้ามีลำดับของคนเริ่มต้นที่ a และจบลงที่ b ซึ่งแต่ละคนในลำดับได้พบกับคนถัดไปในลำดับ ∎

ตัวอย่างที่ 5.13 R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของสถานที่หยุดรถประจำทางทั้งหมดในกรุงเทพ ฯ

วิธีทำ R = {(a,b)| เป็นไปได้ที่จะเดินทางจาก a ไป b โดยไม่ต้องต่อรถ}

R^n = {(a,b)| เป็นไปได้ที่จะเดินทางจาก a ไป b โดนต่อรถ n-1 ครั้ง}

R^* = {(a,b)| เป็นไปได้ที่จะเดินทางจาก a ไป b โดยต่อรถได้มากครั้งเท่าที่จำเป็น} ▮

ทฤษฎีบทที่ 5.2 โคลเชอร์ถ่ายทอดของความสัมพันธ์จะเท่ากับการเชื่อมต่อความสัมพันธ์ R^*

พิสูจน์ที่ 5.2 ต้องแสดง 2 ข้อ คือ 1. R^* กรณีการถ่ายทอด

2. R^* เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดที่ $R^* \subseteq S$

1. R^* กรณีการถ่ายทอด ถ้า $(a,b) \in R^*$ และ $(b,c) \in R^*$ แล้วมีวิถี จาก a ไป b และมีวิถี จาก b ไป c ใน R

$\therefore$ มีวิถี จาก a ไป c นั่นคือ $(a,c) \in R^*$

$\therefore$ R^* มีการถ่ายทอด

2. R^* เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดที่ $R^* \subseteq S$

สมมติ S เป็นการถ่ายทอดความสัมพันธ์ที่อยู่ใน R

S^n เป็น การถ่ายทอดและ $S^n \subseteq S$

$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$ และ $S^k \subseteq S$

ถ้า $R \subseteq S$ แล้ว $R^* \subseteq S^*$ เพราะวิถีใน R จะเป็นวิถี ใน S ด้วย

$\therefore R^* \subseteq S^* \subseteq S$

นั่นคือการถ่ายทอดความสัมพันธ์ใด ๆ ที่ อยู่ใน R จะอยู่ใน R^*

$\therefore R^*$ เป็นการถ่ายทอดโคลเชอร์ของ R

ทฤษฎีบทที่ 5.3 ให้ A เป็นเซตที่มี n สมาชิก และ R เป็นความสัมพันธ์บน A ถ้ามีวิถีใน R จาก A ไป b แล้วจะมีวิถี ดังกล่าวซึ่งขนาดไม่เกิน n และเมื่อ a$\neq$b ถ้ามีวิถีดังกล่าว จาก a ไป b แล้ว จะมีวิถีซึ่งขนาดไม่เกิน n-1 จากทฤษฎีบทจะได้

$$R^{*} = R \cup R^{2} \cup R^{3} \cup \ldots \cup R^{n}$$

ทฤษฎีบทที่ 5.4 $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{2} \vee_R^{3} \vee \ldots \vee M_R^{[n]}$

วิธีทำ ใช้ในการหาการถ่ายทอดโคลเชอร์ ของ R ∎

ตัวอย่างที่ 5.14 ความสัมพันธ์ R จะแทนด้วย $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ จงหาการถ่ายทอดโคลเชอร์ ของ R

วิธีทำ $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{2} \vee_R^{3}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ∎

ขั้นตอนวิธี ***Procedure*** transitive closure (M_R: เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง n x n)

A=M_R

B=A

For i = 2 to n

Begin

A = A⊙ M_R

B= B V A

End {B เป็นเมทริกซ์เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งสำหรับ R^*}

มีความซับซ้อนเชิงเวลา $= (n-1)n^3+(n-1)n^2 = n^4 - n^2 = 0(n^4)$

5.3.3 ขั้นตอนวิธีของวอร์แชล

ขั้นตอนวิธีของวอร์แชล (Warshall's algorithm) ใช้ในการหาการถ่ายทอดโคลเชอร์ของ R โดยใช้ $2n^3$ บิตดำเนินการ โดยมีนิยามที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้

นิยามที่ 5.6 วิถีจาก a ไป b ผ่านเซตของจุด $a(x_1,x_2,\ldots x_{m-1})$ และ $b(x_1,x_2,\ldots x_{m-1})$ เรียกว่าเซตของจุดภายใน (interior vertices) จุดแรกและจุดสุดท้ายไม่เป็นเซตของจุดภายในเว้นแต่ว่าจะถูกวิถีผ่านอีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนวิธี 1. ลำดับการทำงานคอมพิวเตอร์ ของ $W_0,W_1,\ldots W_n$

เมื่อ $W_0 = M_r$

$W_K = \lfloor W_{ij}^{(t)} \rfloor$

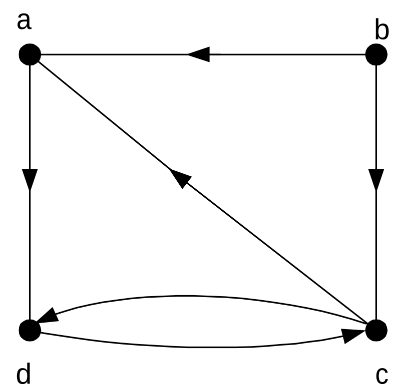
โดยที่ $W_{ij} =$ 0 ถ้าไม่ใช่กรณีนี้

1 ถ้ามีวิถี จาก V_I ไป V_j และ เซตของจุดภายในทั้งหมด

$\in \{v_1,v_2,\ldots v_n\}$

2. จะได้ $W_n = M_{R^*}$ = การถ่ายทอดโคลเชอร์ของ R

ตัวอย่างที่ 5.15 สมมติ R แทนด้วย จงหาโคลเชอร์ถ่ายทอดของ R จากรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 กราฟแทนความสัมพันธ์ R

กำหนดให้ $v_1=a, v_2=b, v_3=c, v_4=d$

วิธีทำ

$$M_R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad \therefore W_0=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$W_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad W_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$W_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix} \qquad W_4=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=M_{R^*}$$

∎

ขั้นตอนวิธี ***Procedure*** Warshall (M_R: เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง nxn)

```
W=M_R
For k=1 to n
Begin
    For i=1 to n
    Begin
        For j=1 to n
            W_ij = W_ij ∨ (W_ik ∧ W_kj)
    end
end {W=[w_ij] เป็น M_R* }
ความซับซ้อนเชิงเวลา = 2n^3
```

5.4 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่ไม่ซับซ้อน แล้วพยายามอธิบายแก้ไขกรณีทั่วไปสำหรับปัญหาขนาดใหญ่ ดังนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้

นิยามที่ 5.7 ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ จะเป็นสูตรซึ่ง แสดง a_n ในพจน์ของพจน์ก่อนหน้า $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq n_0$ เมื่อ n_0 ไม่เป็นเลขจำนวนเต็มลบและลำดับนี้จะเรียกว่าเป็นผลลัพธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด ถ้ามีพจน์สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

ตัวอย่างที่ 5.16 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด $= a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ สำหรับ n = 2,3,4,… และสมมติ $a_0 = 3, a_1 = 5$

วิธีทำ $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$

$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$

$a_2 = a_2 - a_2 = -3 - 2 = -5$ ▌

ตัวอย่างที่ 5.17 ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลลัพธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด $= a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ สำหรับ n = 2,3,4… หรือไม่ เมื่อ $a_n = 3n$ สำหรับเลขที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ n

วิธีทำ สำหรับ $n \geq 2$ $\quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$= 2(3(n-1) - 3(n-2))$

$= 3n$

$\therefore \{a_n = 3n\}$ เป็นผลลัพธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$= a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$\therefore \{a_n = 2^n\}$ ไม่เป็น เพราะ $a_2 \neq 2a_1 - a_0$ ▌

ตัวอย่างที่ 5.18 ฝากเงินในธนาคารจำนวน 10,000 บาท ซึ่งได้ดอกเบี้ย 11 % คิดดอกเบี้ยให้ปีละครั้ง เมื่อครบ 30 ปี จะมีเงินในธนาคารเท่าไร

วิธีทำ การคิดดอกเบี้ยจะเป็นแบบทบต้น ให้ $P_n =$ เงินที่มีหลังจาก n ปี

$P_n = P_{n-1} + (0.11)P_{n-1} = (1.11)P_{n-1}$

สภาพเริ่มต้น $P_0 = 10{,}000$

$\therefore P_1 = (1.11)P_0, P_2 = (1.11)^2 P_1 = (1.11)^3 P_0, \ldots$

$P_n = (1.11)^n P_0$

$\therefore P_{30} = (1.11)^{30}(10{,}000) = 228{,}922.97$ บาท ▌

ตัวอย่างที่ 5.19 ปล่อยลูกกระต่าย (ตัวผู้ตัวเมีย) คู่หนึ่ง ตั้งแต่แรกเกิดไว้บนเกาะแห่งหนึ่ง ซึ่งไม่มีกระต่ายอื่นๆ อยู่เลย กระต่ายจะมีลูกได้เมื่ออายุ 2 เดือนขึ้นไป โดยจะมีลูกครั้งละ 2 ตัว ทุกเดือน จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่แสดงจำนวนกระต่าย หลังจาก n เดือน ที่ปล่อยคู่แรก (สมมติไม่มีกระต่ายตาย)

วิธีทำ ให้ f_n = จำนวนคู่ของกระต่ายหลังจาก n เดือน

$\therefore$ ได้ $f_1 = 1, f_2 = 2$

กระต่ายเมื่อสิ้นเดือน n = กระต่ายที่สิ้นเดือน n-1 + ลูกกระต่ายที่เกิดใหม่

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$\therefore$ ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

ด้วยสภาพเริ่มต้น $f_1 = 1, f_2 = 1$ $n \geq 3$ อันดับของฟิโบนักซี ▌

ตัวอย่างที่ 5.20 หอคอยฮานอย จะมีหลักหมุดอยู่ 3 หลัก และมีแผ่นทองคำขนาดต่างกัน ตรงกลางแผ่นทองคำมีรูอยู่ตรงกลางเพื่อให้ใส่ลงในหลักหมุดได้ ในตอนเริ่มต้นแผ่นทองคำทั้งหมดจะอยู่ในหลักหมุดที่ 1 (ซ้ายมือสุด) ก่อนโดยเรียงขนาดของแผ่นจากใหญ่ไปเล็ก แผ่นใหญ่ที่สุดจะอยู่ด้านล่าง จุดประสงค์คือต้องการย้ายแผ่นทองคำจากหลักหมุดซ้ายมือสุดไปหลักที่อยู่ขวามือสุด โดยมีเงื่อนไขว่าจะไม่นำแผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่าวางทับแผ่นที่มีขนาดเล็กกว่า และสามารถย้ายได้ทีละ 1 แผ่นต่อครั้ง Johnsonbaugh, 1984, p.72-73) จงหาจำนวนการย้ายเมื่อมีแผ่นทองคำ n แผ่น ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด

วิธีทำ ให้ H_n = จำนวนของการย้ายเมื่อ มีแผ่นทองคำ n แผ่น

วิธีการย้าย 1. ย้ายแผ่นที่ n-1 จากหลักหมุดซ้ายไปไว้หลักกลาง

2. ย้ายแผ่นที่ n ไปไว้ที่หลักขวามือสุด

3. ย้ายแผ่นที่ n-1 จากหลักกลางไปไว้ที่หลักขวา

$$\therefore \quad H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * $$

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1}+1 \\
&= 2(2H_{n-2}+1)+1) \\
&= 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots.. + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots.. + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น หากพระต้องการย้ายแผ่นทองคำ 64 แผ่นไปยังอีกหลักหมุดหนึ่ง สมมติการย้ายใช้เวลา 1 วินาที/แผ่น จะต้องใช้เวลาในการย้ายทั้งสิ้น

$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ วินาที หรือ $>$ 500 พันล้านปี

วันที่พระย้ายแผ่นสุดท้ายเสร็จคือวันโลกาวินาศ (doomsday) ▌

ตัวอย่างที่ 5.21 จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดและกำหนดสภาพเริ่มต้น ในการกำหนดจำนวนของสายของบิตขนาด n ที่สร้างขึ้นโดยไม่มี 0 อยู่ติดกัน

วิธีทำ กรณีที่บิตสุดท้ายเป็น 1

จำนวนของรูปแบบบิต ที่ไม่มี 0 อยู่ติดกัน จะเท่ากัน

จำนวนของรูปแบบบิต ขนาด n-1 ที่ไม่มี 0 อยู่ติดกัน , a_{n-1}

กรณีที่บิตสุดท้าย เป็น 0

จำนวนของรูปแบบบิตที่ไม่มี “00” จะเท่ากับ จำนวนของรูปแบบบิตขนาด n-2 ที่ไม่มี “00” , a_{n-2} (บิตรองสุดท้ายต้องเป็น 1)

$\therefore a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 3$

สภาพเริ่มต้น $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8\ a_5 = 13, \ldots$ ▌

5.5 ความสัมพันธ์สมมูล

ความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) เป็นความสอดคล้องต้องกันของคุณสมบัติภายใต้ความสัมพันธ์นั้น ๆ มีนิยามและทฤษฎีที่สำคัญดังต่อไปนี้

นิยามที่ 5.8 ความสัมพันธ์บนเซต A จะเรียกว่าความสัมพันธ์สมมูล ถ้าความสัมพันธ์มีคุณสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่างที่ 5.22 R เป็น ความสัมพันธ์บนเซตของสายตัวอักษรภาษาอังกฤษ

วิธีทำ กำหนดว่า $(a,b) \in R$ ก็ต่อเมื่อ $l(a) = l(b)$ เมื่อ $l(x)$ = ขนาดของ R มีคุณสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

$\therefore R$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล ▮

ตัวอย่างที่ 5.23 จาก $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \bmod m\}$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือไม่

วิธีทำ $a \equiv a \bmod m$ $\therefore$ มีคุณสมบัติการสะท้อน

$a \equiv b \bmod m \rightarrow b \equiv a \bmod m$ $\therefore$ มีคุณสมบัติสมมาตร

$a \equiv b \bmod m$, $b \equiv c \bmod m$

$a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k+l)m$

$\therefore a \equiv c \bmod m$ $\therefore$ มีคุณสมบัติการถ่ายทอด

$\therefore$ R เป็นความสัมพันธ์สมมูล ▮

5.5.1 ชั้นสมมูล

นิยามที่ 5.9 R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A เซตของสมาชิกที่มีความสัมพันธ์กับสมาชิก a ของ A จะเรียกว่าชั้นสมมูล (equivalence classes) ของ a wrt R เขียนแทนด้วย $[a]_R$ โดย $[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$ และถ้า $b \in [a]_R$ b จะเรียกว่าตัวแทนของชั้นสมมูลนี้

ตัวอย่างที่ 5.24 R = {(a,b)a = b หรือ a=-b} จงหาชั้นสมมูลของเลขจำนวนเต็ม

วิธีทำ $[a]_R = \{a,-a\}$

$[7]_R = \{7,-7\}$

$[5]_R = \{5,-5\}$

$[0]_R = \{0\}$ ▌

5.5.2 ชั้นสมมูลและการแบ่งกั้น

ชั้นสมมูลและการแบ่งกั้น (partition) มีทฤษฎีสำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.5 R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & a\ R\ b \\ \text{(ii)} & [a] = [b] \\ \text{(iii)} & [a] \cap [b] \neq 0 \end{array}\right\} \text{ สมมูลกัน}$$

พิสูจน์ที่ 5.5 (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (i)

1. (i) $\rightarrow$ (ii) ให้ $c \in [a] \rightarrow a\ R\ b$, $\because a\ R\ b \rightarrow b\ R\ a$

$\rightarrow b\ R\ a$

$\rightarrow c\ R\ b$

$\rightarrow c \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$

ให้ $c \in [a] \rightarrow c\ R\ b$

$\rightarrow c\ R\ a$

$\rightarrow c \in [a]$

$\therefore [b] \subseteq [a]$

นั่นคือ $\therefore [a] \subseteq [b]$

2. (ii) $\rightarrow$ (iii) ให้ [a]=[b] $\therefore [a] \cap [b] \neq \varnothing$ เว้นแต่ [a]

แต่ $[a] \neq 0$ เพราะ $a \in [a]$ เนื่องจาก เป็น

3. (iii) $\rightarrow$ (i) ให้ $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

มี $c \in [a]$ และ $c \in [b]$ $\exists c$

a R c และ b R c

a R c และ c R b

$\rightarrow$ a R b

ความสัมพันธ์สมมูลบน A

$$\bigcup_{a \in A} [a]_r = A$$

$[a]R \cap [b]R = \varnothing$ เมื่อ $[a]_R \neq [b]_R$

[a],[b] เป็นเซตเดียวกันหรือไม่ก็เป็นเซตต่างสมาชิก

การแบ่งกั้นของเซต S จะเป็นที่รวมของเซตย่อยที่เป็นเซตต่างสมาชิกที่ไม่ใช่เซตว่าง ของ S ซึ่งยูเนียนกันแล้ว เป็น S

หรือ $A_i, i \in I$ จะเป็นการแบ่งกั้นของ S

ก็ต่อเมื่อ $A_i \neq \varnothing \; \forall i \in I$

$A_i \cap A_i = \varnothing$ เมื่อ $i \neq j$

และ $\bigcup_{i \in I} Ai = S$

ทฤษฎีบทที่ 5.6 R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S แล้ว ชั้นสมมูลของ R จะมีรูปเป็นการแบ่งกั้น ของ S และกลับกัน ถ้ากำหนดการแบ่งกั้น $\{A_i | i \in I\}$ ของ S แล้วจะมีความสัมพันธ์สมมูล R ที่มี A_i เป็นชั้นสมมูล

ตัวอย่างที่ 5.25 เซตอะไรในการแบ่งกั้นของเลขจำนวนเต็มที่เป็นผลมาจากสมภาค mod 4

วิธีทำ $[0]_4 = \{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$

$[1]_4 = \{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots.\}$

$[2]_4 = \{\ldots,-6,-2,2,6,\ldots\}$

$[3]_4 = \{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$

แต่ละชั้นเป็นเซตต่างสมาชิก และยูเนียน = เลขจำนวนเต็ม

$\therefore$ สร้างรูปเป็นการแบ่งกั้นของเลขจำนวนเต็มได้ ▮

5.6 อันดับย่อย

อันดับย่อย (partial ordered) เป็นเซตของสมาชิกบางส่วนของสมาชิกทั้งหมดที่มีอยู่ ซึ่งเมื่อเลือกมาพิจารณาแล้วยังคงคุณสมบัติของความสัมพันธ์ครบถ้วน อาทิ คุณสมบัติการสะท้อน การถ่ายทอด และการต่อต้านการสมมาตร เป็นต้น นิยามและทฤษฎีที่สำคัญของอันดับย่อยมีดังต่อไปนี้

นิยามที่ 5.10 ความสัมพันธ์ R บนเซต S จะเรียกว่าอันดับย่อย (partial ordering) ถ้า R มีคุณสมบัติการสะท้อน, การต่อต้านการสมมาตร และการถ่ายทอด เซต S และ R จะเรียกว่าเซตลำดับอย่างย่อย หรือโพเซต (poset) แทนด้วย (S,R)

ตัวอย่างที่ 5.26 จงแสดงว่า $\geq$ เป็นอันดับย่อยบนเลขจำนวนเต็ม

วิธีทำ $\because a \geq a$ $\therefore$ เป็นการสะท้อน

ถ้า $a \geq b$ และ $b \geq a$ แล้ว $a = b$

$\therefore$ เป็นการต่อต้านการสมมาตรถ้า $a \geq b$

และ $b \geq a$ แล้ว $a \geq c$ $\therefore$ เป็นการถ่ายทอด

$\therefore \geq$ เป็น อันดับย่อย มี $(\mathbb{Z},\geq)$ เป็นโพเซต ▮

สัญลักษณ์ สัญกรณ์ของโพเซต $a \preccurlyeq b$ หมายถึง $(a,b) \in R$

$a \leq b$ หมายถึง $a \leq b$ แต่ $a \neq b$

$\therefore$ เป็นอันดับย่อย

นิยามที่ 5.11 สมาชิก a และ b ของโพเซต $(s, \prec)$ จะเรียกว่ามีการวัดเทียบ (comparable) ถ้า $a \preccurlyeq b$ หรือ $b \preccurlyeq a$ อย่างใดอย่างหนึ่ง เมื่อ $a, b \in S$ ซึ่งถ้าไม่เป็นทั้งสองอย่างทั้ง $a \preccurlyeq b$ และ $b \preccurlyeq a$ แล้ว a และ b จะเรียกว่าไม่มีการวัดเทียบ (incomparable)

ตัวอย่างที่ 5.27 โพเซต $(Z^+, |)$

วิธีทำ 3 และ 9 มีการวัดเทียบเพราะ $3 \mid 9$

5 และ 7 เป็น ไม่มีการวัดเทียบเพราะ $5 \nmid 7$ และ $7 \nmid 5$ ▮

นิยามที่ 5.12 ถ้า $(S, \preccurlyeq)$ เป็น โพเซต และ 2 สมาชิกใด ๆ ของ S มีการวัดเทียบ S จะเรียกว่าเซตมีลำดับอย่างสิ้นเชิง (totally ordered) หรือ เซตมีลำดับเชิงเส้น (linearly ordered) และ $\preccurlyeq$ จะเรียกว่าลำดับทั้งหมด (total order)

ตัวอย่างที่ 5.28 โพเซต $(Z^+, \leq)$ เป็นเซตมีลำดับอย่างสิ้นเชิง

วิธีทำ เพราะ $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ เมื่อ a และ b เป็นเลขจำนวนเต็ม ▮

ตัวอย่างที่ 5.29 โพเซต $(Z^+, |)$ ไม่เป็นเซตมีลำดับอย่างสิ้นเชิง

วิธีทำ เพราะมีสมาชิกบางตัวซึ่งไม่มีการวัดเทียบ เช่น 5 และ 7 เป็นต้น ▮

5.6.1 ลำดับพจนานุกรม

ถ้าพบว่ามีโครงสร้างอันดับย่อยของผลคูณคาร์ทีเชียน 2 โพเซตคือ $(A_1,\preccurlyeq_1)$ และ $(A_2,\preccurlyeq_2)$ แล้ว ลำดับพจนานุกรม (lexicographic order) $\preccurlyeq$ บน $A_1 \times A_2$ ถูกจำกัดโดยข้อกำหนดที่ว่าลำดับคู่ที่ 1 ต้องน้อยกว่าลำดับคู่ที่ 2 หรือ $(a_1,a_2) \prec (b_1,b_2)$ เมื่อ $a_1 \leq b_1$ หรือ เมื่อ $a_1 = b_1$ และ $a_2 \leq b_2$

ตัวอย่างที่ 5.30 จงหาว่า $(3,5) \prec (4,8)$, $(3,8) \prec (4,5)$ และ $(4,9) \prec (4,11)$ อยู่ในโพเซต $(ZXZ,\preccurlyeq)$ ที่ $\preccurlyeq$ เป็นลำดับพจนานุกรมที่ถูกสร้างจาก $\leq$ ที่มีความสัมพันธ์บน Z หรือไม่

วิธีทำ $(3,5) \prec (4,8)$ เพราะ $3 < 4$

$(3,8) \prec (4,5)$ เพราะ $3 < 4$

$(4,9) \prec (4,11)$ เพราะ $9 < 11$

$\therefore$ โพเซต $(ZXZ,\preccurlyeq)$ เมื่อ $\preccurlyeq$ เป็นลำดับพจนานุกรม

และยังสามารถกำหนดบน $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$

$(a_1,a_2,\ldots\ldots a_n) \prec (b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)$ ได้ในลักษณะเดียวกัน ▌

ตัวอย่างที่ 5.31 อันดับต่อไปนี้เป็นลำดับพจนานุกรมหรือไม่

Discreet $\prec$ discrete เป็น เพราะ e < t

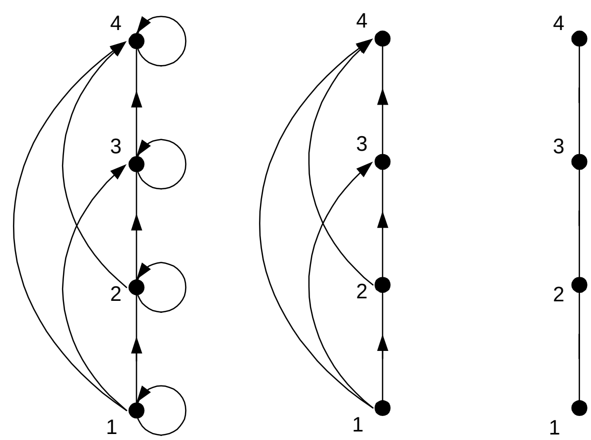
Discreet $\prec$ discreetness ไม่เป็น เพราะ discreet = discreetness

Discreet $\prec$ discreetion เป็น เพราะ discrete $\prec$ discret ▌

5.6.2 แผนภาพแฮซ

แผนภาพแฮซ (hasse diagrams)เป็นแผนภาพที่ใช้แทนอันดับย่อย ที่มีการทำงานเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้ (Rosen, 1995, p.406-407)

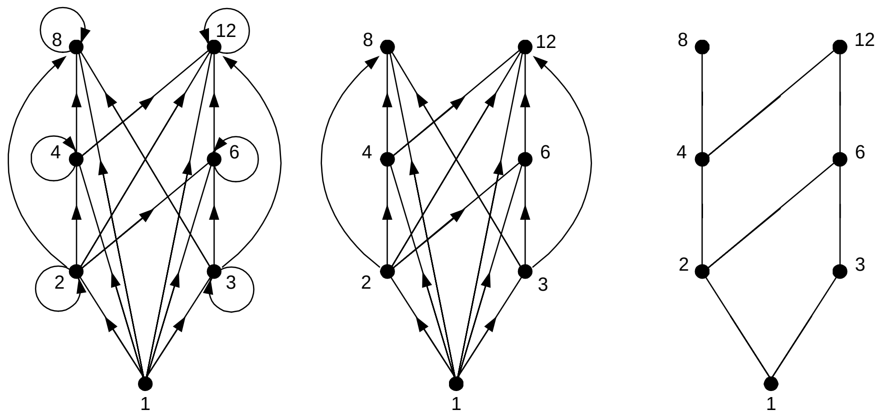
1. เริ่มจากกราฟระบุทิศทางสำหรับ ความสัมพันธ์นั้น
2. ลบการวนซ้ำที่ทุก ๆ จุดของเซต
3. ลบเส้นเชื่อมที่เกิดจากการถ่ายทอด
4. จัดเรียงแต่ละเส้นเชื่อมให้เส้นเชื่อมเริ่มต้นอยู่ข้างล่างและให้เส้นเชื่อมสิ้นสุด อยู่ข้างบน
5. ลบลูกศรทั้งหมดออกไป ดังตัวอย่างการทำงาน ในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 แสดงการทำงานของแผนภาพแฮซ

ตัวอย่างที่ 5.32 จงเขียนแผนภาพแฮซซึ่งแทนอันดับย่อย {(a,b) | a หาร b } บน {1,2,3,4,6,8,12}

วิธีทำ ดังการทำงานในรูปที่ 5.6 ในรูปซ้ายมือสุดจะลบการวนซ้ำที่ทุก ๆ จุดของเซตกลายเป็นรูปกลางจากนั้นลบเส้นเชื่อมที่เกิดจากการถ่ายทอด จัดเรียงแต่ละเส้นเชื่อมให้เส้นเชื่อมเริ่มต้นอยู่ข้างล่างและให้เส้นเชื่อมสิ้นสุดอยู่ข้างบน จากนั้นลบลูกศรทั้งหมดออกไปจะกลายเป็นรูปที่อยู่ซ้ายมือสุด ▌



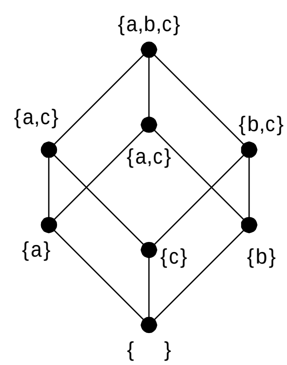
รูปที่ 5.6 แผนภาพแฮซแทนอันดับย่อย {(a,b) | a หาร b } บน {1,2,3,4,6,8,12}

ตัวอย่างที่ 5.33 จงเขียนแผนภาพแฮซสำหรับอันดับย่อย {(A,B)|A⊆B} บน เพาเวอร์เซต ของ S, P(S), เมื่อ S = {a,b,c}

วิธีทำ P(s) ={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

อันดับย่อย = {(∅,∅),({a},{a}),………..,(∅,{a}), (∅,{b}),(∅,{c})

ลบคู่ลำดับที่เป็นการสะท้อนและที่เกิดจากการถ่ายทอดจะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 5.7 ▌



รูปที่ 5.7 แสดงผลลัพธ์จากการเขียนแผนภาพแฮซสำหรับอันดับย่อย {(A,B)|A⊆B}

นิยามที่ 5.13 x เป็น ขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound: lub) ของ A ถ้า x เป็นขอบเขตบนและน้อยกว่าขอบเขตบนของ A ตัวอื่นๆ x เป็นขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound: glb) ของ A ถ้า x เป็นขอบเขตล่างและมากกว่าขอบเขตล่างของ A ตัวอื่น ๆ

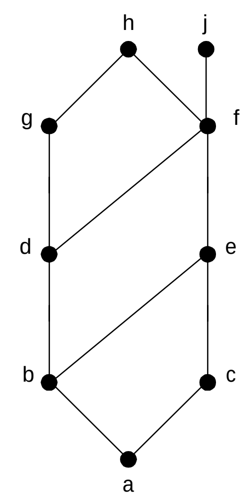
ตัวอย่างที่ 5.34 จงหาขอบเขตล่างสูงสุดและขอบเขตบนต่ำสุดของ {b,d,g} จากรูปที่ 5.8

วิธีทำ ขอบเขตบนของ {b,d,g} คือ g,h

$\because g \prec h$ $\therefore$ ขอบเขตบนต่ำสุด คือ g

ขอบเขตล่างของ {b,d,g} คือ a,b

$\because a \prec b$ $\therefore$ ขอบเขตล่างสูงสุด คือ b



รูปที่ 5.8 แผนภาพแฮชของโพเซตตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5.35 จงหาขอบเขตล่างสูงสุดและขอบเขตบนต่ำสุดของ {3,9,12} และ {1,2,4,5,10} ในโพเซต $(Z^+, |)$

วิธีทำ สำหรับ {3,9,12} จำนวนเต็มบวกที่หาร 3,9,12 ลงตัวคือ 1,3

$\therefore$ ขอบเขตล่าง คือ 1,3 และได้ $1 \mid 3$

$\therefore$ ขอบเขตล่างสูงสุดคือ 3

เลขจำนวนเต็มบวกที่ 3,9,12 หารลงตัวคือ 36,72,…..108,…..

∴ ขอบเขตบนคือ 36,72,108,…..

และ 36 หารขอบเขตบนทุกตัวลงตัว

∴ ขอบเขตบนต่ำสุดคือ 36 ∎

นิยามที่ 5.14 $(S,\leq)$ เป็นเซตที่มีอันดับดีแล้ว ถ้าเป็นโพเซต ซึ่ง $\leq$ อันดับทั้งหมด (total ordered) และทุกเซตที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตย่อยของ S จะมีสมาชิกต่ำสุดเสมอ

ตัวอย่างที่ 5.36 เซตของคู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก, $Z^+ \times Z^\times$ ซึ่งเรียงลำดับพจนานุกรมจะเป็นเซตอันดับทั้งหมด

วิธีทำ $(Z,\leq)$ ไม่เป็นลำดับดีแล้วเพราะ $\leq$ ไม่เป็นเซตอันดับทั้งหมด เนื่องจาก เลขจำนวนเต็มลบ $\subseteq$ Z ไม่มีสมาชิกต่ำสุด ∎

5.6.3 แลตทิซ

แลตทิซ (lattices) เซตของอันดับย่อยที่ทุกคู่ของสมาชิกมีทั้งขอบเขตล่างใหญ่สุดและขอบเขตบนเล็กสุด แลตทิซมีคุณสมบัติมากมาย อาทิ ใช้ในการประยุกต์แตกต่างกันมาก ๆ เช่น การไหลของสารสนเทศ และการใช้หน้าที่สำคัญในพีชคณิตบูลีน (Rosen, 1995, p.411)

ตัวอย่างที่ 5.37 โพเซต $(Z^+,|)$ เป็นแลตทิซหรือไม่

วิธีทำ ให้ a และ b เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ขอบเขตล่างใหญ่สุดและขอบเขตบนเล็กสุดของเลขทั้ง 2 ตัว คือ ค.ร.น. และ ห.ร.ม.ของเลขทั้งคู่ ถ้าตรวจสอบแล้วมีเลขดังกล่าวจะถือว่าโพเซตนี้เป็นแลตทิซ ∎

ตัวอย่างที่ 5.38 โพเซต ({1,2,3,4,5},|) กับ ({1,2,4,8,16},|) เป็นแลตทิซหรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจาก ({1,2,3,4,5},|) ปรากฏว่า 2 และ 3 ไม่มีขอบเขตบนใน โพเซต จึงไม่มีขอบเขตบนเล็กสุดทำให้ไม่เป็นแลตทิซ

พิจารณาจาก ({1,2,4,8,16},|) ทุก ๆ 2 ตัวของสมาชิกมีทั้งขอบเขตล่างใหญ่สุดและขอบเขตบนเล็กสุด ดังนั้นจึงเป็นแลตทิซ ▌

5.6.4 โทโพโลจิคอลของการเรียง

นิยามที่ 5.15 โทโพโลจิคอลของการเรียง (topological sorting) เป็นการสร้างการเข้ากันได้ไปยังเซตที่มีอันดับดีแล้วจากอันดับย่อยไปยังอันดับทั้งหมด ตัวอย่างเช่น $\leq$ จะเรียกว่าเข้ากันได้กับอันดับย่อย R ถ้า $a \leq b$ เมื่อไรก็ตามที่ a R b

ทฤษฎีบทที่ 5.7 ทุกเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง โพเซต $(S,\leq)$ จะมีสมาชิกต่ำสุด

พิสูจน์ที่ 5.7 เลือกสมาชิก a_0 ของ S

ถ้า a_0 ไม่เป็นตัวต่ำ จะมี a_2 ซึ่ง $a_2 < a_1$

ทำนองเดียวกัน ตัวที่ลำดับ $= A_n$ จะมี A_{n+1} ซึ่ง $A_{n+1} < A_n$

เพราะเซตย่อยของ $(S,\leq)$ เป็นเซตจำกัด

$\therefore$ จะต้องมีสมาชิกต่ำสุด

5.6.5 ขั้นตอนวิธีโทโพโลจิคอลของการเรียง

ต้องกำหนดอันดับทั้งหมดบน โพเซต $(A,\leq)$ $(A,\leq)$

1. เลือกสมาชิกตัวต่ำ a_1 (จะต้องมีเสมอจากคำจำกัดความ)

   $(A-\{a\},\leq)$ เป็นลำดับแรก

2. ลบ a_1 จาก A แล้วเลือกตัวต่ำคือ a_2

ทำเช่นนี้เรื่อยๆ ไป ตราบใดที่ A ยังไม่เท่ากับเซตว่าง

เนื่องจาก A เป็นเซตจำกัด $\therefore$ การประมวลผลจะต้องสิ้นสุด

$$\therefore\ a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$$

อันดับทั้งหมดนี้ จะตรงกับอันดับย่อยเดิม

ตัวอย่างที่ 5.39 จงหาอันดับทั้งหมดที่เข้ากันได้ของโพเซต ({1,2,4,5,12,20} , $|$)

วิธีทำ (1) เลือกตัวต่ำได้ 1 และ ลบออกเหลือ {2,4,5,12,20}

(2) เลือกตัวต่ำที่เหลือได้ 2,5 (เลือก 1 ตัว สมมติเลือก 5)

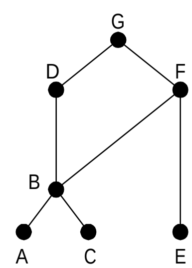
ลบ 5 ออก เหลือ {2,4,12,20}

ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปจนกว่าจะเป็น $\varnothing$

$\therefore$ จะเข้ากันได้กับอันดับทั้งหมดนั่นคือ

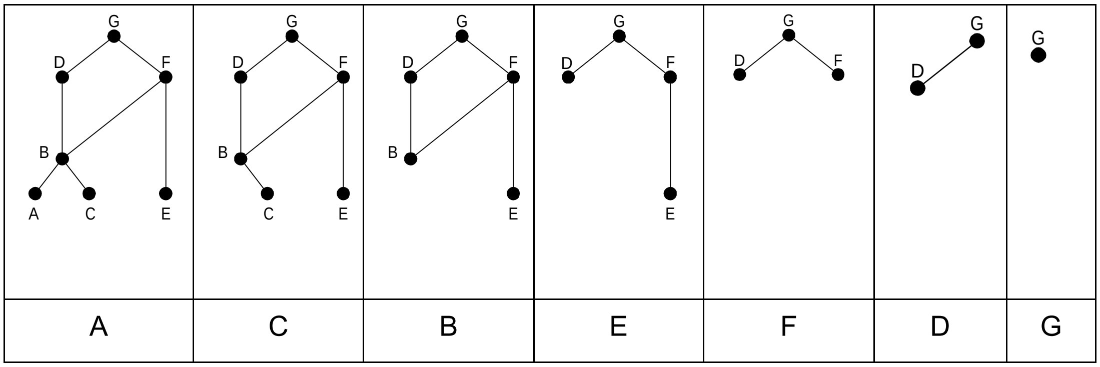
$$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$$ ▮

ตัวอย่างที่ 5.40 การทำงานโครงการหนึ่ง ประกอบด้วย 7 งาน ดังรูปที่ 5.9 ซึ่งประกอบกันเป็นอันดับย่อย โดยการพิจารณา งาน X$\prec$ งาน Y หมายถึงงาน Y จะเริ่มได้เมื่องาน X เสร็จแล้ว จงหาอันดับของงานที่จะทำโครงการนี้เสร็จ



รูปที่ 5.9 โครงการประกอบด้วย 7 งาน

วิธีทำ อันดับของงาน 7 งานที่เสร็จสิ้นโครงการแสดงได้ดังรูปที่ 5.10 โดยการเลือก A→C→B→E→F→D→G ▮



รูปที่ 5.10 การเลือกตัวต่ำออกจากอันดับของงาน 7 งาน

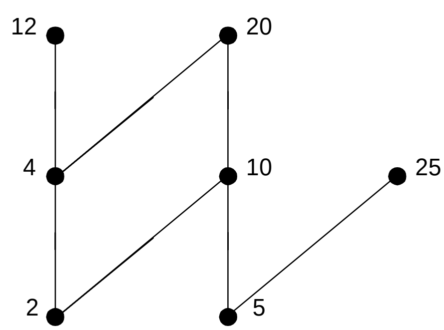
5.6.6 สมาชิกค่าสูงสุดและสมาชิกค่าต่ำสุด

นิยามที่ 5.16 a เป็นสมาชิกค่าสูง ใน โพเซต $(S,\leq)$ ถ้าไม่มี $b \in S$ ซึ่ง $a < b$

a เป็นสมาชิกค่าต่ำ ถ้าไม่มี $b \in S$ ซึ่ง $b < a$

ตัวอย่างที่ 5.41 พิจารณาโพเซต $\{\{2,4,5,10,12,20,25\}, \mid \}$ จงหาสมาชิกค่าสูงและต่ำ โดยแทนเป็นแผนภาพแฮช

วิธีทำ แสดงดังรูปที่ 5.11



ค่าต่ำคือ 2,5

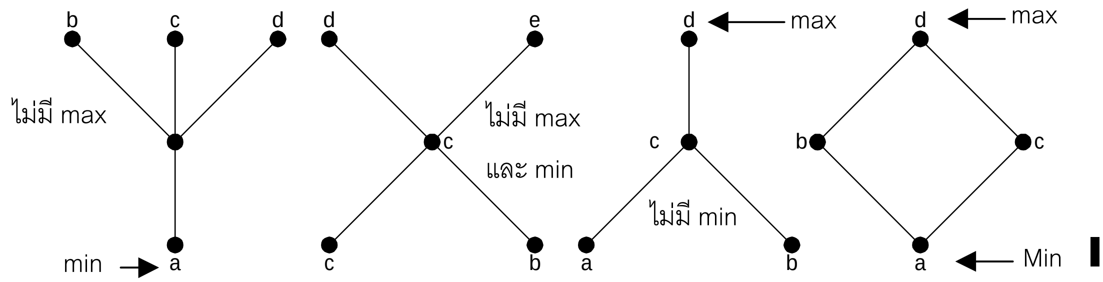
ค่าสูงคือ 12,20,25

รูปที่ 5.11 แผนภาพเฮชของโพเซต

นิยามที่ 5.17 a เป็นสมาชิกค่าสูงสุดของ $(S,\leq)$ ถ้า $5 \leq a \quad \forall b \in S$

a เป็นสมาชิกค่าต่ำสุดของ $(S,\leq)$ ถ้า $a \leq b \quad \forall b \in S$

ตัวอย่างที่ 5.42 จากแผนภาพที่ให้มาในรูปที่ 5.12 จงหาสมาชิกค่าสูงสุดและต่ำสุด

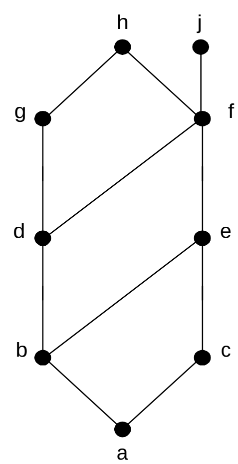


รูปที่ 5.12 แผนภาพตัวอย่างเพื่อการหาสมาชิกค่าสูงสุดและต่ำสุด

นิยามที่ 5.18 u เป็นขอบเขตบนของ $A \subseteq (S,\leq)$ ถ้า $a \leq u, \forall \in A$

l เป็นขอบเขตล่างของ $A \subseteq (S,\leq)$ ถ้า $l \leq a, \forall \in A$

ตัวอย่างที่ 5.43 จากแผนภาพที่ให้มาในรูปที่ 5.13 จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง



รูปที่ 5.13 แผนภาพตัวอย่างเพื่อการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

วิธีทำ $A=\{a,b,c\}$ ขอบเขตล่างคือ a ขอบเขตบนคือ e,f,i,h

$A=\{j,h\}$ ขอบเขตล่างคือ f,e,c,b,a ขอบเขตบน ไม่มี

5.7 สรุป

ในบทนี้ได้ศึกษาวิธีการนับโดยอาศัยความสัมพันธ์และการเวียนบังเกิด สำหรับปัญหาหลายประเภท วิธีการนี้มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีการอื่น ๆ เพราะเป็นการพิจารณาแก้ปัญหาทั่วไปโดยอาศัยปัญหาขนาดเล็กลงมา เพื่อได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด และเงื่อนไขเริ่มต้น การแทนค่าเพื่อหาคำตอบสามารถกระทำได้สำหรับ n ซึ่งมีค่าไม่มากนัก ถ้า n มีค่ามากการใช้คอมพิวเตอร์หาคำตอบจะสามารถกระทำ อย่างไรก็ตาม สำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดบางประเภท การแก้สมการเพื่อหาคำตอบทั่วไปในรูปฟังก์ชันของ n ก็ทำได้เช่นกัน

5.8 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหา ความสัมพันธ์ R บนเซตของเลขจำนวนเต็มทุกตัว มีคุณสมบัติการสะท้อน, การสมมาตร, การต่อต้านการสมมาตร, และ/หรือ การถ่ายทอด, เมื่อ $(x,y) \in R$ จากข้อต่อไปนี้

    1.1 $x \neq y$

    1.2 $xy \geq 1$

    1.3 $x= y + 1$ or $x = y – 1$

    1.4 $x \equiv y \pmod 7$

    1.5 $x = y^2$

    1.6 $x \geq y^2$

2. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของประชากรประกอบด้วยคู่ของ (a,b) โดยที่ a บิดามารดาของ b. ให้ S เป็นความสัมพันธ์บนเซตของประชากรประกอบด้วยคู่ของ (a,b) โดยที่ a และ b เป็นพี่น้อง จงหา SoR และ RoS

3. จงแทนความสัมพันธ์ {1,2,3} ด้วยเมทริกซ์ (โดยสมาชิกของเซตนี้แสดงเป็นอันดับแบบเพิ่มค่าขึ้น)

    3.1 {(1,1), (1,2), (1,3)}

    3.2 {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3)}

    3.3 {{(1,2), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3)}

4. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ที่แทนด้วยเมทริกซ์ M^R

$$M^R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ที่ใช้แทนข้อต่อไปนี้

4.1 R^{-1} 4.2 $\overline{R}$ 4.3 R^{-2}

5. หาโคลเชอร์ถ่ายทอดบน {1,2,3,4} จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

5.1 {(1,2), (2,1), (3,4), (4,1)}

5.2 {(2,1), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,3)}

5.3 {{(1,2), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3)}

6. สมมติให้ A ไม่เป็นเซตว่าง และ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน. เมื่อให้ R เป็นความสัมพันธ์ของ f(x) = f(y)

6.1 จงแสดง R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

6.2 ชั้นสมมูลของ R คือ

7. หาอันดับพจนานุกรมของ n-แถว ต่อไปนี้

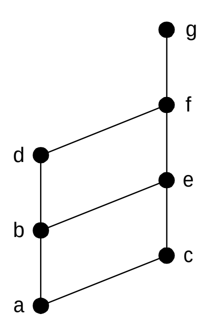
7.1 (1,1,2), (1,2,1)

7.2 (0,1,2,3), (0,1,3,2)

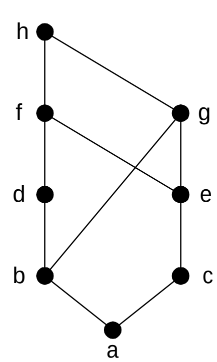
7.3 (1,0,1,0,1), (0,1,1,1,0)

8. โพเซตตามแผนภาพแฮซในข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นแลตทิซ

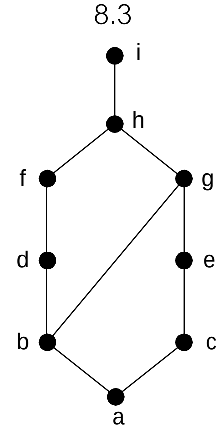
8.1



8.2



8.3



เอกสารอ้างอิง

สุวิมล ฮอลล์. (2542). **ทฤษฎีคณนา (Theory of Computation)**. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

Johnsonbaugh, Richard, Date. (1984). **Discrete mathematics**. NY: Macmillan Publishing.

Rosen Kenneth H. (1995). **Discrete mathematics and its application** (3rd ed). Singapore: McGraw-Hill.