แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

4.1 ความนำ

4.2 พื้นฐานของการนับ

   4.2.1 หลักแห่งการบวก

   4.2.2 หลักแห่งการคูณ

4.3 หลักการรวมเข้าแยกออก

4.4 แผนภาพต้นไม้

4.5 หลักการนกพิราบ

4.6 การจัดเรียง

   4.6.1 การจัดเรียงแบบง่าย

   4.6.2 การจัดเรียงที่มีการซ้ำ

4.7 การประสม

4.8 สัมประสิทธิ์ทวินาม

4.9 ดิสครีตกับความน่าจะเป็น

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้กฎพื้นฐานของการนับ
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้เรื่องการจัดเรียง ทั้งกรณีวัตถุซ้ำและไม่ซ้ำ
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเรื่องการประสม
4. เพื่อให้ผู้ศึกษาประยุกต์ทฤษฎีการนับ การจัดเรียงและการประสม ในการหาคำตอบได้
5. เพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจเรื่องสัมประสิทธ์ทวินาม

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็ปเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท

บทที่ 4
การนับ การจัดเรียง และการประสม

4.1 ความนำ

การนับแม้จะเป็นความสามารถพื้นฐานของมนุษย์ แต่ในมุมมองของปัญหาเรื่องการนับจะมีโจทย์และการแก้ไขที่หลากหลาย แนวทางการได้มาซึ่งคำตอบนั้นจะขึ้นอยู่กับแนวคิด เทคนิคและประสบการณ์ โดยมากใช้หลักการของเหตุผลรวมทั้งความคิดรวบยอดที่ครอบคลุม การนับนำพาสู่การจัดเรียงหรือการจัดลำดับ และการเลือกสิ่งที่ที่ประสมกันอยู่ในลำดับของการจัดเรียงของเซตของสิ่งที่สนใจ

การหาคำตอบของการนับ อาศัยเพียงพื้นฐานทางคณิตศาสตร์คือการบวกและการคูณเท่านั้น ส่วนปัญหาการประสมเกิดขึ้นจากการพยายามศึกษาเกมการพนัน ซึ่งมีมาตั้งแต่ศตวรรษที่ 17 วิธีการแก้ปัญหานี้ จะใช้หลักของการนับและหลักของความน่าจะเป็น เมื่อใช้แนวคิดที่มีแบบแผนในการหาคำตอบจึงสามารถเขียนขั้นตอนวิธีที่ตายตัว เพื่อนำไปสู่การเขียนโปรแกรมภาษาส่งให้คอมพิวเตอร์ประมวลผลได้ในที่สุด

4.2 พื้นฐานของการนับ

การนับแม้จะมีสูตรเกี่ยวกับการจัดเรียง และการประสมอยู่บ้าง แต่ไม่ได้มีทฤษฎีเฉพาะทางการนับ จัดเป็นความสามารถพื้นฐานของมนุษย์สำหรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยทักษะทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยพื้นฐานทางคณิตศาสตร์คือ การบวกและการคูณ อธิบายได้ดังนี้

4.2.1 หลักแห่งการบวก

หลักแห่งการบวก (the sum rule) ถ้างานหนึ่งสามารถทำส่งใน n_1 วิธี ภายใต้เงื่อนไข 1 และสามารถจะทำสำเร็จใน n_2 วิธี ภายใต้เงื่อนไข 2 โดยเงื่อนไข 1,2 ไม่สามารถจะเกิดขึ้นพร้อมกันได้ แล้วจะมี $n_1 + n_2$ วิธีในการทำงานนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 จะมีกี่วิธีในการเลือกตัวแทน 1 คนจาก กลุ่ม นักศึกษา ซึ่งประกอบด้วย ปี 3 มี 60 คน และ นักศึกษาปี 4 ซึ่งมี 58 คน

วิธีทำ การเลือกตัวแทนจากนักศึกษาปี 3 มี 60 วิธี

การเลือกตัวแทนจากนักศึกษาปี 4 มี 58 วิธี

$\therefore$ จะมีวิธีในการเลือกตัวแทน 60+58 = 118 วิธี ▮

ตัวอย่างที่ 4.2 นักศึกษาจะมีวิธีในการเลือกหัวข้อวิทยานิพนธ์ได้กี่วิธี ถ้า อาจารย์คนที่ 1 มี 4 หัวข้อ อาจารย์คนที่ 2 มี 3 หัวข้อ อาจารย์คนที่ 3 มี 5 หัวข้อ (หัวข้อไม่ซ้ำกัน) ใช้กลักแห่งการบวก ซึ่งสามารถจะขยายไปเป็น n งานได้

วิธีทำ วิธีในการเลือกหัวข้อวิทยานิพนธ์จาก อาจารย์คนที่ 1 = 4 วิธี

วิธีในการเลือกหัวข้อวิทยานิพนธ์จาก อาจารย์คนที่ 2 = 3 วิธี

วิธีในการเลือกหัวข้อวิทยานิพนธ์จาก อาจารย์คนที่ 3 = 5 วิธี

$\therefore$วิธีในการเลือกหัวข้อวิทยานิพนธ์ = 4+3+5 =12 วิธี ▮

4.2.2 หลักแห่งการคูณ

หลักแห่งการคูณ (the product rule) สมมติกรรมวิธีการหนึ่งสามารถจะแบ่งออกเป็น 2 งาน ถ้างานที่ 1 มี n_1วิธีในการทำ และงานที่มี n_2 วิธีในการทำ หลังจากงานที่ 1 ทำเสร็จแล้วจะมี $n_1 n_2$ วิธีในการทำกรรมวิธีการนี้

ตัวอย่างที่ 4.3 ถ้ากำหนดเลขทะเบียนรถเป็นตัวอักษรไทย 1 ตัว และ ตัวเลขไม่เกิน 3 หลัก จะสามารถออกเลขทะเบียนให้รถได้กี่คัน

วิธีทำ $\therefore$ ตัวอักษรไทยมี 44 ตัว และ เลขไม่เกิน 3 หลัก มีอยู่ 1000 จำนวน

ดังนั้น จะมีวิธีให้เลขทะเบียนได้ $44 \times 1000 = 44{,}000$ วิธี ▮

ตัวอย่างที่ 4.4 จะมีกี่วิธีในการแปลงอักษรภาษาอังกฤษ ไปเป็นอักษรภาษาอังกฤษในการเข้ารหัส

วิธีทำ A มีวิธีในการแปลง 26 วิธี

B มีวิธีในการแปลง 25 วิธี

⋮

Y มีวิธีในการแปลง 2 วิธี

Z มีวิธีในการแปลง 1วิธี

$\therefore$ วิธีในการแปลงทั้งหมด $26 \times 25 \times 2 \times 1 = 26!$ วิธี ▮

ตัวอย่างที่ 4.5 การเลือกรหัสลับจากตัวอักษรภาษาอังกฤษ 26 ตัว จะมีได้ กี่วิธี ถ้าต้องเลือกรหัสลับความยาวไม่น้อยกว่า 2 ตัวอักษร แต่ไม่เกิน 4 ตัวอักษร

วิธีทำ ความยาวรหัสลับ = 2 เลือกได้ 26^2 วิธี

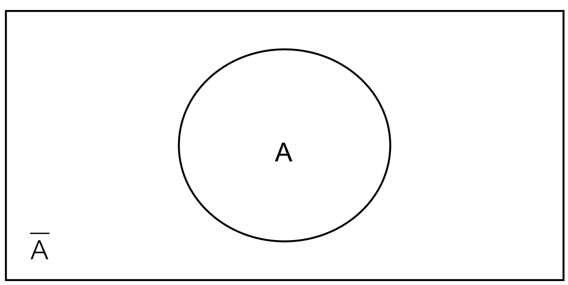
ความยาวรหัสลับ = 3 เลือกได้ 26^3 วิธี

ความยาวรหัสลับ = 4 เลือกได้ 26^4 วิธี

$\therefore$ วิธีในการเลือกรหัสลับ = $26^2 + 26^3 + 26^4 = 745{,}228$ วิธี ▮

4.3 หลักการรวมเข้าแยกออก

หลักการรวมเข้าแยกออก (principle of inclusion-exclusion) เมื่องานสามารถจะทำพร้อม ๆ กันได้ การนับจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้น ๆ จะเพียงแต่บวกกันเหมือนหลักแห่งการบวกไม่ได้ จะต้องลบด้วยจำนวนวิธีที่จะทำงานทั้งสองได้พร้อม ๆ กัน ด้วยการนับจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่มีคุณสมบัติตามที่ต้องการ โดยสมาชิกต่าง ๆ ที่มีคุณสมบัติเดียวกัน จะถูกรวมเป็นกลุ่มเข้าด้วยกันเป็นเซต โดยให้นิยาม $\overline{A}$ ว่าเป็นส่วนเติมเต็มของเซต A ซึ่งหมายถึงเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกใน เอกภาพสัมพัทธ์ที่ไม่เป็นสมาชิกของ A แสดงดังแผนภาพของเวนน์ รูปที่ 4.1 โดยกำหนดให้ N แทนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพสัมพัทธ์ และ ให้ $|A|$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A จะได้ว่า $|\overline{A}| = N-|A|$ ตัวอย่างเช่น มีนักศึกษาที่ลงเรียนวิชาดิสครีตจำนวน 100 คน ในจำนวนนี้เป็นนักศึกษาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์จำนวน 30 คน (ให้แทนด้วยเซต A) แสดงว่ามีนักศึกษาที่ไม่ใช่เอกวิทยาการคอมพิวเตอร์มาลงเรียนวิชาดิสครีต เป็นจำนวน $N - |A| = 100-30 = 70$ คน

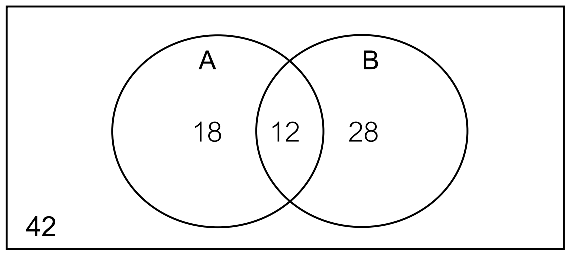


รูปที่ 4.1 แผนภาพของเวนน์ สำหรับหนึ่งเซต

จากจำนวนนักศึกษาที่ลงเรียนวิชาดิสครีตดังตัวอย่างข้างต้น ถ้าต้องการทราบว่ามีนักศึกษาหญิงอยู่ 40 คน (ให้แทนด้วยเซต B) และในจำนวนนี้มีนักศึกษาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์ 12 คน จึงสรุปได้ว่าจำนวนนักศึกษาที่เป็นผู้หญิงหรือนักศึกษาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์มีอยู่ $|A \cup C|$ ซึ่งหาได้จากสมการดังนี้

$$|A \cup B| = \quad |A| + |B| - |A \cap B|$$

สังเกตว่าการที่ต้องนำ $|A \cap B|$ ลบออก เพราะว่ามีนักศึกษาหญิงที่อยู่เอกวิทยาการคอมพิวเตอร์แต่ละคนจะถูกนับในเซต A หนึ่งครั้ง และถูกนับในเซต B อีกหนึ่งครั้ง เนื่องจากอาจมีนักศึกษาหญิงที่อยู่เอกวิทยาการคอมพิวเตอร์จำนวน $|A \cap B|$ คนจึงต้องลบจำนวนนี้ออกจาก $|A|+|B|$ สำหรับตัวอย่างนี้ $|A \cup B|$ = 30 + 40 – 12 = 58 คน แสดงดังรูปที่ 4.2



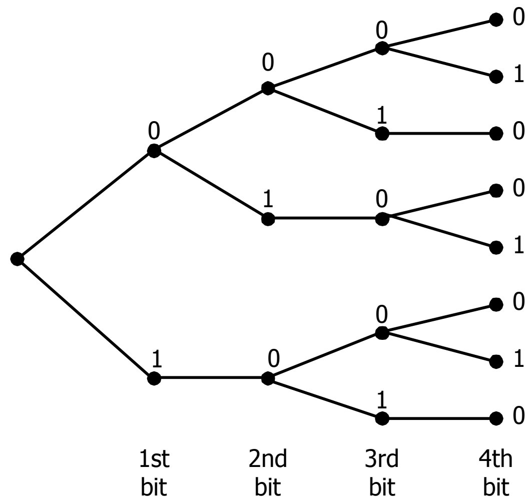
รูปที่ 4.2 แผนภาพของเวนน์ สำหรับสองเซต

4.4 แผนภาพต้นไม้

แผนภาพต้นไม้ (tree diagram) เป็นปัญหาการนับซึ่งอาจจะแก้ปัญหาได้ ด้วยการใช้แผนภาพต้นไม้ ซึ่งประกอบด้วย ราก และ กิ่ง แทนความน่าจะเป็นของตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 4.6 มีบิตสตริงขนาด 4 บิตจำนวนเท่าใด ที่ไม่มีรูปแบบของ “11” ปรากฏอยู่

วิธีทำ แสดงแผนภาพต้นไม้ได้ดังรูปที่ 4.3 โดยแสดงทุกบิตสตริงที่มีขนาด 4 ที่ไม่มีบิต ‘11’ ปรากฏซึ่งสรุปจากการพบเห็นทั้งสิ้น 8 วิธี ▌



รูปที่ 4.3 แผนภาพต้นไม้แสดงบิตจำนวน 4 ที่ไม่มี ‘11’ ปรากฏ

ตัวอย่างที่ 4.7 จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงการแข่งขันแบบแพ้คัดออกของทีม 2 ทีม ซึ่งทีมใดชนะถึง 3 เกมก่อนจะเป็นผู้ชนะ

วิธีทำ แสดงแผนภาพต้นไม้ได้ดังรูปที่ 4.4 ∎

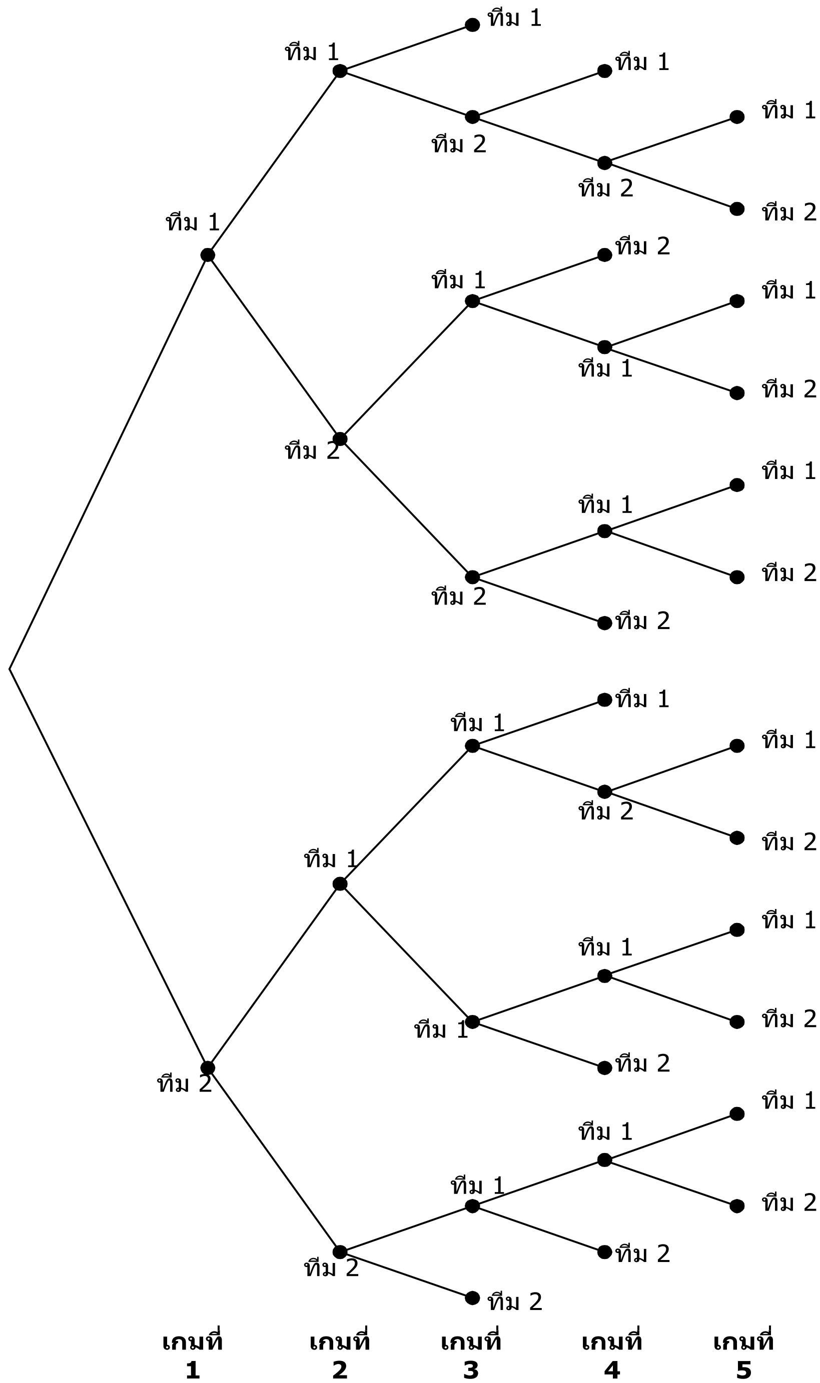
4.5 หลักการนกพิราบ

หลักการนกพิราบ (the pigeonhole principle) กล่าวไว้ว่าถ้ามีช่องสำหรับให้นกพิราบอาศัยน้อยกว่าจำนวนนกพิราบจะมีอย่างน้อย 1 ช่อง ที่มีนกพิราบอย่างน้อย สองตัวอาศัยอยู่

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ถ้าวัตถุจำนวน k+1 หรือมากกว่า นำไปใส่กล่องจำนวน k ใบ จะมีกล่องอย่างน้อย 1 ใบที่มีวัตถุ 2 หรือมากกว่า

พิสูจน์ที่ 4.1 สมมติว่า ไม่มีกล่องใดเลยที่มีวัตถุ ≥ 2

$\therefore$ จำนวนวัตถุจะมีอย่างมาก k วัตถุซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ว่า จำนวนวัตถุ $\geq$ k+1



รูปที่ 4.4 แผนภาพต้นไม้ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 4.7

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้า n วัตถุถูกนำไปใส่ในกล่องจำนวน k กล่อง แล้วจะมีอย่างน้อย 1 กล่อง ที่มีอย่างน้อย $\lceil N / k \rceil$ วัตถุ

พิสูจน์ที่ 4.2 สมมติว่าไม่มีกล่องใดเลยที่มี $> \lceil N / k \rceil$ -1 วัตถุ

$\therefore$ จำนวนวัตถุอย่างมากคือ $k(\lceil N / k \rceil - 1 < k((\lceil N / k \rceil + 1) - 1))$

$\because \lceil N / k \rceil < (N / k) + 1$

ซึ่งขัดแย้งกับจำนวนวัตถุ = N

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ในอันดับของเลขจำนวนจริงที่ต่างกัน $n^2 + 1$ ตัว จะมีอันดับย่อยขนาด $n + 1$ ซึ่งเป็นการเพิ่มขึ้นอย่างแท้จริงหรือลดลงอย่างแท้จริง

พิสูจน์ที่ 4.3 อันดับของ $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}$ ที่เทอม a_k ใด ๆ จะมี อันดับที่เพิ่มขึ้น i_k เทอมที่ยาวที่สุด และมีอันดับที่ลดลง d_k เทอมที่ยาวที่สุด สมมติไม่มีการเพิ่มอันดับหรือลดอันดับที่ยาว $\geq n + 1$

$\therefore i_k, d_k \leq n$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots\ldots n^2 + 1$

โดยกฎการคูณจะมี n^2 คู่ลำดับที่เป็นไปได้ (i_k, d_k)

$\therefore$ โดยหลักการนกพิราบ ถ้ามี (n^2+1) คู่ จะต้องมีอย่างน้อย 2 คู่ลำดับที่เท่ากัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ a_i ในอันดับต่างกันทั้งหมด

$\therefore$ สามารถจะสร้างการเพิ่มอันดับหรือการลดอันดับที่ยาว $i_k + 1$ หรือ $d_k + 1$ ได้ ขัดแย้งกับที่สมมติไว้

ตัวอย่างที่ 4.8 อันดับ 8,11,9,1,4,6,12,10,5,7 เท่ากับ 10 จำนวน $(10 = 3^2+1)$ มี การเพิ่มอันดับ 4 ตัว ขนาด 4 พจน์

วิธีทำ $\underline{1,4,6,12}$ $\underline{1,4,6,7}$ $\underline{1,4,6,10}$ $\underline{1,4,5,7}$

$x < y$ ค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

มีอันดับย่อยของการลด 1 ตัว ขนาด 4 พจน์

$\frac{11,9,6,5}{x<y}$ ค่าจะลดลงเรื่อย ๆ ∎

4.6 การจัดเรียง

การจัดเรียง (permutation) คือการนำวัตถุมาเรียงเป็นลำดับ การจัดเรียงวัตถุต่าง ๆ กันกระทำได้โดยพิจารณาทีละตำแหน่ง ทำให้สามารถเลือกวัตถุใดก็ได้จากวัตถุทั้งหมด จนเหลือวัตถุชิ้นสุดท้ายเพียงวัตถุเดียว การจัดเรียงโดยทั่วไปมีรูปแบบดังต่อไปนี้

4.6.1 การจัดเรียงแบบง่าย

นิยามที่ 4.1 การจัดเรียงของเซตของวัตถุที่ต่างกัน จะเป็นการจัดลำดับของวัตถุเหล่านั้น

นิยามที่ 4.2 r-การจัดเรียง (r-permutation) คือการวัดการจัดเรียงของวัตถุ r วัตถุ

ทฤษฎีบทที่ 4.4 จำนวน r-การจัดเรียง ของเซตของ n วัตถุ

เขียนได้เป็น $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่างที่ 4.9 การจัดลำดับนักเทนนิส n คน มีกี่วิธี ถ้าการจัดลำดับนี้เป็นแบบสุ่ม ความน่าจะเป็นที่นาย ก จะเป็นอันดับสองมีเท่าไร

วิธีทำ การจัดลำดับของนักเทนนิส n คน มีทั้งหมด n! วิธี ด้วยการจัดลำดับแบบสุ่ม นาย ก (หรือใครก็ตาม) อาจอยู่ที่อันดับใดก็ได้ ดังนั้นความน่าจะเป็นซึ่งนาย ก จะเป็นอันดับสอง (หรืออันดับใด ๆ) จึงมีค่า $\frac{1}{n}$

การคำนวณอีกวิธีหนึ่งอาศัยคำจำกัดความของความน่าจะเป็นที่ว่า

ความน่าจะเป็นที่นาย ก เป็นอันดับสอง

$$= \frac{\text{จำนวนวิธีที่จะให้นาย ก เป็นอันดับสอง}}{\text{จำนวนวิธีการจัดลำดับทั้งหมด}}$$

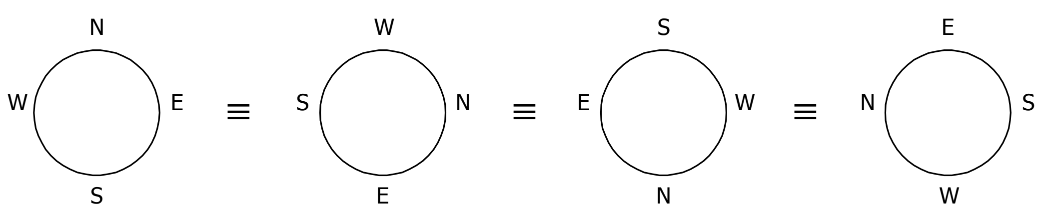
ทำให้ทราบว่าจำนวนวิธีการจัดลำดับทั้งหมด คือ n! จำนวนวิธีซึ่งจะให้นาย ก เป็นอันดับสองนั้น คือ การองลำดับสองให้นาย ก และจัดลำดับคนอื่นที่เหลือ ซึ่งก็คือ P(n-1, n-1) = (n-1)! ดังนั้นความน่าจะเป็นที่นาย ก เป็นอันดับสองมีค่า $\frac{(n-1)!}{n} = \frac{1}{n}$ ▌

ตัวอย่างที่ 4.10 การคำนวณจำนวนวิธีที่จะจัดคน 12 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลมขนาด 12 ที่นั่ง

วิธีทำ

(1) หากโต๊ะกลมนี้ตั้งอย่างไม่พิจารณาทิศทาง (ที่นั่งทุกที่เหมือนกัน) การไม่พิจารณาทิศทางจึงไม่มีที่นั่ง ซึ่งถือว่าเป็นตำแหน่งที่หนึ่ง (ไม่มีจุดอ้างอิง) การหาจุดอ้างอิงทำได้โดยให้คน ๆ หนึ่งนั่งก่อน จากจุดนี้ทำให้สามารถเลือก 1 คนใน 11 คนที่เหลือมานั่งด้านขวาของคนแรก และสามารถเลือกอีก 1 คนใน 10 คนที่เหลือมานั่งด้านขวาของคนที่สอง ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปจนหมดที่นั่งจำนวนวิธีทั้งหมดจึงมีค่า 11! ▌

(2) วิธีที่สองในการแก้ปัญหานี้คือ การพิจารณาอย่างมีทิศทาง (มีที่นั่งซึ่งหันไปทางเหนือ) ดังนั้นการจัดที่สั่งจึงมีทั้งหมด 12! วิธี เนื่องจากแต่ละวิธีของ 12! วิธีนี้จะซ้ำกับอีก 11 วิธีเมื่อไม่พิจารณาทิศทาง ดังรูป 4.5 ดังนั้นเมื่อไม่พิจารณาทิศทางจำนวนวิธีทั้งหมดคือ $\frac{12!}{12} = 11!$ ▌



รูปที่ 4.5 การสมมูลกันของโต๊ะกลม 4 ที่นั่ง เมื่อไม่พิจารณาทิศทาง

ตัวอย่างที่ 4.11 การคำนวณจำนวนวิธีในการจัดลำดับตัวอักษร 6 ตัวในคำ CYCLIC

วิธีทำ ปัญหาตัวอักษร C ซ้ำนั้นแก้โดย พิจารณาตัวอักษรอื่นที่ไม่ซ้ำกันก่อน นั่นคือการเลือก 3 ตำแหน่งสำหรับอักษร I, L, Y แล้วจึงจัดลำดับ 3 ตัวอักษรนี้ ซึ่งมีวิธีทั้งหมด P(6,3) ในแต่ละวิธีเหล่านี้ ต้องเติมตำแหน่งว่างที่เหลือด้วยตัวอักษร C อีก 3 ตัว ซึ่งจัดลำดับไม่ได้ เพราะเป็นตัวอักษรเดียวกัน ▌

ตัวอย่างที่ 4.12 คำนวณความน่าจะเป็นที่ได้รับแจกไพ่ 5 ใบ แบบสุ่มจากไพ่สำรับหนึ่ง (52 ใบ) แล้วได้ไพ่ทั้ง 5 ใบดอกเดียวกัน และคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้เบอร์หนึ่ง 3 ใบเท่านั้น

วิธีทำ ไพ่ 5 ใบจากไพ่ 52 ใบ เกิดขึ้นได้ทั้งหมด C(52,5) = 2,598,960 แบบ ในไพ่สำรับหนึ่งมี 4 ดอก (โพธิ์ดำ โพธิ์แดง ดอกจิก และข้าวหลามตัด) ดอกละ 13 ใบ ดังนั้นไพ่ 5 ใบ ซึ่งเป็นดอกเดียวกัน (ดอกใดดอกหนึ่ง) เกิดได้ C(13,5) = 1,287 แบบ

ถ้าพิจารณาทั้ง 4 ดอกจึงเกิดได้ทั้งหมด 1,287x4 = 5,148 แบบ

ความน่าจะเป็นที่เกิด 5 ใบ ดอกเดียวกันทั้งหมด

$$= \frac{5148}{2598960} = 0.00198$$ ▌

ในการได้รับเบอร์หนึ่ง 3 ใบ มีได้ C(4,3) = 4 แบบ ส่วนอีก 2 ใบ เลือกจากที่เหลือในสำรับ (เอาเบอร์หนึ่งทั้ง 4 ใบออก) จึงได้ C(48,2) = 1,128 จากหลักแห่งการคูณวิธีทั้งหมดจึงเป็น 4x1,128=4,512 แบบ

ความน่าจะเป็นที่เกิดเบอร์หนึ่ง 3 ใบเท่านั้น

$$= \frac{4512}{2598960} = 0.00174$$ ▌

4.6.2 การจัดเรียงที่มีการซ้ำ

ในหัวข้อนี้ได้ศึกษาการจัดวัตถุที่ซ้ำกัน เช่น การจัดคำซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรซ้ำกัน และการเลือกจากสิ่งของที่เหมือน ๆ กัน เช่น การสั่งอาหารที่ซ้ำกัน เป็นต้น ก่อนที่จะแสดงสูตรการคำนวณต้องเข้าใจหลักการให้ลึกซึ้งดังตัวอย่างที่ 4.13

ตัวอย่างที่ 4.13 มีวิธีจัดลำดับ ตัวอักษร l, e, t, t, e, r ได้กี่วิธี

วิธีทำ เริ่มจากการเลือกตำแหน่ง 2 ตำแหน่งสำหรับตัวอักษร e ทั้งสองก่อน ซึ่งมี C(6,2) วิธี แล้วจึงเลือกอีก 2 ตำแหน่ง สำหรับตัวอักษร t ทั้งสอง ซึ่งมี C(4,2) ขั้นต่อไป ทำการเลือก $C(6,2) \cdot C(4,2) \cdot C(2,1) \cdot C(1,1) = 15 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 180$ วิธี ▌

ทฤษฎีบทที่ 4.5 ถ้ามีวัตถุประเภทที่ 1 อยู่ r_1 สิ่ง วัตถุประเภทที่ 2 อยู่ r_2 สิ่ง … และประเภทที่ m อยู่ r_m สิ่ง โดยที่ $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ แล้วจำนวนวิธีการจัดวัตถุทั้ง n สิ่งนี้ ซึ่งเขียนได้เป็น $P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m)$ มีค่า

$$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_{m-1}}{r_m} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}$$

พิสูจน์ที่ 4.5 จากทฤษฎีบทที่ 4.5 สามารถกระทำได้ทำนองเดียวกับการพิสูจน์สมการ $P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$ สมมติว่าในแต่ละประเภท i ซึ่งมี r_i สิ่งนี้เป็นวัตถุต่าง ๆ กัน ดังนั้นการจัดเรียงวัตถุทั้ง n สิ่งจึงมี n! วิธีนี้ จึงสามารถจัดกลุ่มพวกที่ปรากฏคล้ายกัน เช่น คำว่า letter เป็นกลุ่มของลำดับ

$l\, e_1\, t_1\, t_2\, e_2\, r$ $\quad$ $l\, e_2\, t_1\, t_2\, e_1\, r$

$l\, e_1\, t_2\, t_1\, e_2\, r$ $\quad$ $l\, e_2\, t_2\, t_1\, e_1\, r$

ซึ่งถือว่าเป็น 1 วิธีใน $P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m)$ วิธี เพียงแต่เกิดจากการจัดลำดับ วิธี (e 2 ตัว และ t 2 ตัว) ใน n! วิธี ในรูปทั่วไปจึงเขียนได้เป็น

$$n! = P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) \cdot r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_m!$$

นั่นคือ

$$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}$$

ตัวอย่างที่ 4.14 คำนวณจำนวนวิธีในการสั่งก๋วยเตี๋ยว 7 ที่ โดยมีวิธีสั่งได้ 3 แบบ คือ เส้นใหญ่ เส้นเล็ก และบะหมี่

วิธีทำ สมมติว่าการรับคำสั่งรายการอาหารเขียนเป็นรูปแบบ ได้ดังนี้

เส้นใหญ่	เส้นเล็ก	บะหมี่
XX	XXX	XX

ให้เครื่องหมาย X แทนก๋วยเตี๋ยว 1 ที่ หรือจะเขียนให้สั้น ๆ ได้ว่า XX/XXX/XX โดยที่ผู้ขายทราบว่ากลุ่มแรกคือ เส้นใหญ่ กลุ่มที่สอง คือ เส้นเล็ก และกลุ่มสุดท้ายคือ บะหมี่ ปัญหานี้ทางนามธรรมก็คือ การจัดตัวอักษร X 7 ตัว และตัวอักษร / 2 ตัว ซึ่งก็คือการเลือก 2 ตำแหน่ง จาก 9 ตำแหน่งเพื่อว่า / และที่เหลือสำหรับวาง X

คำตอบจึงมีค่า C(9,2) = 36 ∎

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ถ้ามีวัตถุอยู่ n ประเภท จำนวนวิธีการเลือกวัตถุเหล่านี้ r สิ่งโดยให้เลือกซ้ำประเภทกันได้ มีทั้งสิ้น C(r+n-1, r)

ตัวอย่างที่ 4.15 ครอบครัว 3 ครอบครัว ๆ ละ 3 คน ซื้อตั๋วดูละครมา 9 ที่ติดกัน ถ้าการจัดที่นั่งเป็นแบบสุ่ม ให้คำนวณความน่าจะเป็นซึ่งแต่ละครอบครัวจะได้นั่งอยู่ด้วยกันที่ติดกัน

วิธีทำ ในการจัดที่นั่งสำหรับครอบครัวทั้ง 3 มีอยู่

$$P(9; 3, 3, 3) = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1{,}680 \text{ วิธี}$$

การจัดให้แต่ละครอบครัวนั่งด้วยกันต้องแบ่งที่ทั้ง 9 เป็น 3 ตอน ๆ ละ 3 ที่ติดกัน การจัดแต่ละครอบครัวใน 3 ตอนนี้ ทำได้ 3! = 6 วิธี

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่แต่ละครอบครัวจะได้นั่งด้วยกันจึงมีค่า

$$= \frac{6}{1680} \text{ วิธี}$$

▌

ตัวอย่างที่ 4.16 มีตัวอักษร ก 4 ตัว, ข 4 ตัว, ค 4 ตัว และ ง 4 ตัว ให้คำนวณวิธีสร้างลำดับตัวอักษร 10 ตัว โดยที่อักษรแต่ละประเภทต้องปรากฏอย่างน้อย 2 ตัว

วิธีทำ สามารถแบ่งลำดับตัวอักษรดังกล่าวเป็น 2 แบบ

(1) แบบแรกคือ มีอักษรประเภทหนึ่งอยู่ 4 ตัว และประเภทอื่น ๆ อีกประเภทละ 2 ตัว

(2) แบบที่สองคือ มีอักษรอยู่ 2 ประเภท ๆ ละ 3 ตัวและที่เหลืออีก 2 ประเภท ๆ ละ 2 ตัว

สำหรับแบบแรก พิจารณาเลือกตัวอักษรที่ปรากฏ 4 ตัวได้ 4 แบบย่อย แต่ละแบบย่อยนี้มีวิธีจัดลำดับอยู่ P(10; 4, 2, 2, 2) = 18,900 วิธี สำหรับแบบที่สอง พิจารณาเลือกตัวอักษร 2 ประเภท แต่ละประเภทปรากฏ 3 ตัวได้ C(4,2) = 6 แบบย่อย แต่ละแบบย่อยนี้ มีวิธีจัดลำดับอยู่ P(10; 3, 3, 2, 2) = 25,200 วิธี

ดังนั้นวิธีทั้งหมดคือ $4 \cdot 18{,}900 + 6 \cdot 25{,}200 = 226{,}800$ วิธี

▌

ตัวอย่างที่ 4.17 คำนวณจำนวนวิธีสั่งโดนัท 1 โหล จากโดนัท 5 ชนิด โดยให้สั่งโดนัทแต่ละชนิดอย่างน้อยชนิดละ 1 ชิ้น

วิธีทำ ในการสั่งโดนัทให้มีอย่างน้อยชนิดละ 1 ชิ้น ผู้ขายจะหยิบโดนัททั้ง 5 ชนิด ชนิดละ 1 ชิ้นก่อน แล้วจึงหยิบที่เหลือจนครบ การหยิบโดนัททั้ง 5 ชนิด ๆ ละ 1 ชิ้นมีพียงวิธีเดียว ตามทฤษฎีที่ 4.6 การหยิบโดนัทที่เหลืออีก 7 ชิ้น จากโดนัททั้ง 5 ชนิด

กระทำได้ C(7+5-1, 7) = 330 วิธี ▌

ตัวอย่างที่ 4.18 คำนวณจำนวนวิธีในการหยิบลูกบอล 10 ลูก จากกองลูกบอลสีแดง สีฟ้า และสีม่วง ถ้า

(ก) ต้องมีลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 5 ลูก

(ข) ต้องมีลูกบอลสีแดงอย่างมาก 5 ลูก

วิธีทำ ข้อ (ก) คำนวณได้เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 4.18 โดยการหยิบลูกบอลสีแดง 5 ลูกก่อน แล้วจึงเลือกอีก 5 ลูกที่เหลือได้อีก

ดังนั้น C(5+3-1, 5) = 21 วิธี ▌

ข้อ (ข) แก้ปัญหาโดยการมองปัญหาจากอีกมุมหนึ่งคือ ในจำนวนวิธีการหยิบลูกบอล 10 ลูก โดยไม่มีข้อจำกัดใด ๆ C(10+3-1, 10) = 66 วิธี มีอยู่ C(4+3-1, 4) = 15 วิธีในการเลือกให้มีลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 6 ลูก ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 4.18

ดังนั้นจำนวนวิธีการหยิบให้มีลูกบอลสีแดงอย่างมาก 5 ลูก คือ 66-15 = 51 วิธี ▌

4.7 การประสม

การประสม (combination) หรือการเลือก หมายถึงการเลือกวัตถุบางชิ้นออกจากวัตถุทั้งหมด โดยไม่คำนึงถึงลำดับ เป็นการสร้างเซตย่อยมีขนาดของสมาชิกเท่ากับที่เลือกจากเซตที่เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ดังนิยามและทฤษฎีบทต่อไปนี้

นิยามที่ 4.3 การประสม (combination) ของวัตถุ r วัตถุการเลือกที่ไม่เรียงลำดับของ r สมาชิกจากเซต

ทฤษฎีบทที่ 4.7 จำนวน r- การประสมของเซตซึ่งมี n สมาชิกเขียนได้เป็น $C(n,r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ โดยที่ $0 \leq r \leq n$

พิสูจน์ที่ 4.6 $P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$ $P(n,r)=C(n,r).P(r,r)$

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{P(r,r)} \qquad =\frac{n!/(n-r)}{(r-r)!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

พิสูจน์อีกวิธี $C(n,r)=C(n,n-r)$

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)![n(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ตัวอย่างที่ 4.19 ต้องการแบ่งหนังสือจำนวน 9 เล่ม ให้นายดำ และนายแดง โดยให้คนหนึ่งได้ 3 เล่ม อีกคนหนึ่งได้ 6 เล่ม จะแบ่งได้กี่วิธี

วิธีทำ สำหรับการแก้ปัญหาในที่นี้ นายดำอาจได้ 3 หรืออาจได้ 6 เล่ม นายแดงก็เช่นกัน ฉะนั้น วิธีการแบ่งหนังสือ จะเท่ากับ

$$2 \times {}^{9}C_{3} = 2 \times {}^{9}C_{6}$$

$$= 2 \times \frac{9!}{3!6!}$$

$$= \frac{2 \times 9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}$$

$$= 168 \text{ วิธี}$$

▌

ตัวอย่างที่ 4.20 ทีมฟุตบอลทีมหนึ่งประกอบด้วย ผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 5 คน และแต่ละคนเล่นได้ทุกตำแหน่ง ถ้ามีนักฟุตบอลชายทั้งหมด 10 คน และนักฟุตบอลหญิง 10 คน จะสร้างทีมผสมดังกล่าว ทั้งหมดได้กี่ทีม

วิธีทำ

โดยเลือกนักฟุตบอลชาย 6 คน จาก 10 คน ได้ ${}^{10}C_{6} = \frac{10!}{4!6!}$

$= 210$ วิธี

โดยเลือกนักฟุตบอลหญิง 5 คน จาก 10 คน ได้ ${}^{10}C_{5} = \frac{10!}{5!5!}$

$= 252$ วิธี

ดังนั้นจะสามารถสร้างทีมผสมได้ทั้งหมด $= 210 \times 252$

$= 52{,}920$ ทีม ▌

ตัวอย่างที่ 4.21 ในการเลือกกรรมการ ชุดหนึ่งซึ่งมี 6 คน โดยเลือกจากผู้ชาย 3 คน และผู้หญิง 9 คน จะเลือกได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้กรรมการแต่ละชุด มีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน

วิธีทำ

เมื่อเลือกผู้ชาย 1 คนจากทั้งหมด 3 คน และเลือกผู้หญิง 5 คน จากผู้หญิง 9 คน

จะเลือกได้ = ${}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{5}$

= 378 วิธี

เมื่อเลือกผู้ชาย 2 คนจากทั้งหมด 3 คน และเลือกผู้หญิง 4 คน จากผู้หญิง 9 คน

จะเลือกได้ = ${}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{4}$

= 378 วิธี

เมื่อเลือกผู้ชาย 3 คนจากทั้งหมด 3 คน และเลือกผู้หญิง 3 คน จากผู้หญิง 9 คน

จะเลือกได้ = ${}^{3}C_{3} \times {}^{9}C_{3}$

= 84 วิธี

ดังนั้น ถ้าต้องการคณะกรรมการที่มีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน จะเลือกได้

= 378 + 378 + 84

= 840 วิธี ▌

ตัวอย่างที่ 4.22 หญิงคนหนึ่งต้องการชวนเพื่อนซึ่งมี 8 คน ไปรับประทานอาหารที่บ้าน แต่ปรากฏว่าโต๊ะอาหารที่บ้านนั่งได้เพียง 4 คน เท่านั้น จงหาว่าหญิงคนนี้จะเชิญเพื่อได้กี่แบบ ถ้า

(ก) ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

(ข) เพื่อนของเธอ 2 คนเป็นพี่น้องกันและต้องมาหรือไม่มาพร้อมกันทั้ง 2 คน

วิธีทำ

(ก) เมื่อไม่มีเงื่อนไข จะเลือกเชิญได้ ${}^{8}C_{4}$ = 70 วิธี ▌

(ข) ในกรณีนี้ แยกเป็น 2 กรณี คือ

กรณี เชิญพี่น้องคู่นี้ จะเลือกเชิญได้อีก 2 คนจาก 6 คน $^6C_2$

กรณีไม่เชิญพี่น้องคู่นี้ จะเลือกเชิญได้ 4 คนจาก 6 คน $^6C_4$

ดังนั้น วิธีที่จะเลือกเชิญ $= {}^6C_2 + {}^6C_4$

$= 30$ แบบ ▌

4.8 สัมประสิทธิ์ทวินาม

หัวข้อนี้เป็นการศึกษาสัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficients) ซึ่งมีค่า C(n, r) เป็นสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจาย $(a + b)^n$ และเอกลักษณ์พื้นฐานซึ่งเกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ทวินาม การพิสูจน์เอกลักษณ์กระทำได้หลายวิธี อาทิเช่น วิธีการโต้แย้งแจงนับ (combinatorial argument) และการกระจายทวินาม (binomial expansion) เป็นต้น ดังนั้นการศึกษาเรื่องสัมประสิทธิ์ทวินาม ถือเป็นสาขาย่อยในศาสตร์การนับ

ทฤษฎีบทที่ 4.8 (หลักฐานของปาสกาล (Pascal's indentity)) ให้ n และ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวกซึ่ง $n \geq k$ แล้ว $C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$

พิสูจน์ที่ 4.8 สมมติเซต T มี n+1 สมาชิก

a เป็นสมาชิกหนึ่ง ของ T

ให้ $S = T - \{a\}$ $\therefore S$ มี n สมาชิก

จำนวนเซตย่อยของ T ที่มี k สมาชิก = C(n+1, k)

= จำนวนเซตย่อยที่มี a + จำนวนเซตย่อยที่ไม่มี a

a + (k – 1) ตัวของ S k ตัวของ T

C(n,k-1) C(n,k)

$\therefore C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \qquad\qquad \binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\cdots$$

รูปที่ 4.6 สามเหลี่ยมปาสกาล

ที่มา (Rosen, 1995, p.254)

หลักฐานของปาสกาลเป็นพื้นฐานของการจัดระเบียบเรขาคณิตของสัมประสิทธ์ทวินามในรูปแบบสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 4.6 ซึ่งจำนวนแถวในสามเหลี่ยมประกอบด้วยสัมประสิทธ์ทวินามของ $\binom{n}{k}$, k = 0,1,..,n

ทฤษฎีบทที่ 4.9 กำหนดให้ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกแล้ว $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$

พิสูจน์ที่ 4.9 จำนวนเซตย่อยของเซตที่มี n สมาชิก $= 2^n$

C(n,k) คือจำนวน sub ที่มี k สมาชิก

$\therefore \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ คือ จำนวนเซตย่อยทั้งหมด ซึ่ง = 2^n

ทฤษฎีบทที่ 4.10 $C(m+n,r)=\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)\cdot C(n,k)$

$0 \le r \le m,n$

พิสูจน์ที่ 4.10 ให้เซต A มี m ตัว , เซต B มี n ตัว

เลือก r ตัวจาก A หรือ B จะมี $C(m+n,r)$ วิธี

โดย เลือกจาก A $r-k$ ตัว มี $C(m,r-k)$ วิธี

เลือกจาก B k ตัว จะมี C(n, k) วิธี

$\therefore$ เมื่อกำหนด k จะมีวิธีเลือก $C(m,r-k)\cdot C(m,k)$ วิธี

$\therefore$ k ตั้งแต่ 0 ถึง r จะมีวิธีเลือกทั้งหมด

$$\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)\cdot C(n,k)=C(m+n,r)$$

นิยามที่ 4.4 ทฤษฎีบททวินาม จะให้สัมประสิทธิ์ของการกระจายของทวินามในรูปยกกำลัง

นิยามที่ 4.5 นิพจน์ทวินามคือค่าผลรวมของ 2 พจน์ เช่น $(x+y)$

ทฤษฎีบทที่ 4.11 ทฤษฎีบททวินามหาได้จาก

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j \quad ;n > 0$$

พิสูจน์ที่ 4.11 เมื่อกระจาย $(x+y)^n$ แต่ละพจน์จะอยู่ในรูป $x^{n-j}.y^j$

เลือก $n-j$ x จากผลรวม n ซึ่งมี $C(n,n-j)=C(n,j)$ พจน์

$$\therefore (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j$$

ตัวอย่างที่ 4.23 หาทฤษฎีบททวินามของ $(x+y)^4$

$$(x+y)^4 = C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^2 + y^4$$

ทฤษฎีบทที่ 4.12 ให้ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว $\sum_{x=0}^{n} C(n,k) = 2^n$

พิสูจน์ที่ 4.12 $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$

ทฤษฎีบทที่ 4.13 ให้ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0$

พิสูจน์ที่ 4.13 $0 = [(-1)+1]^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k$

4.9 ดิสครีตกับความน่าจะเป็น

เมื่อรู้หลักการการนับ การเรียงและการประสมที่มีหลักการ ทำให้สามารถหาคำตอบได้แล้ว จะทำให้สามารถทำนายถึงความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

นิยามที่ 4.6 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ E ซึ่งเป็นเซตย่อยของแซมเปิลสเปซ S จะเป็นไปได้ทั้งหมดคือ

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

ตัวอย่างที่ 4.24 จงหาความน่าจะเป็นที่ เมื่อ โยนลูกเต๋า 2 ลูกได้ผลรวมของแต้มเป็น 7

แซมเปิลสเปซ S มี $b^2 = 36$ วิธีที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด

E มี 6 วิธี ผลรวมแต้มเป็น 7 คือ

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.14 ให้ E คือเหตุการณ์ที่เกิด ส่วนเติมเต็มของ E = $\bar{E}$ คือความน่าจะเป็นในการไม่เกิดเหตุการณ์แทนด้วย

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$

ทฤษฎีบทที่ 4.15 $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

ตัวอย่างที่ 4.25 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวเลขที่หาร ด้วย 2 หรือ 5 ลงตัว เมื่อเลือกตัวเลขจากเลขจำนวนนับที่ไม่เกิน 100

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$
$$= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} + \frac{10}{100}$$

4.10 สรุป

พื้นฐานของศาสตร์การนับซึ่งเกี่ยวข้องกับการจัดเรียงวัตถุและการเลือกวัตถุ ทั้งที่ซ้ำกันและไม่ซ้ำกัน กฎเกณฑ์พื้นฐานต่างของสูตรต่าง ๆ ที่มาจากหลักแห่งการบวกและหลักแห่งการคูณ ปัญหาที่ซับซ้อนต้องอาศัยวิธีแบ่งพิจารณาเป็นกรณีย่อย การเรียนรู้เรื่องของการนับก่อให้เกิดการคิดอย่างมีเหตุผลซึ่งถือเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ดิสครีต อันเป็นศาสตร์พื้นฐานของวิทยาการคอมพิวเตอร์

4.11 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. หากมีจดหมาย 4 ฉบับ ถ้าต้องการทิ้งลงในตู้จดหมาย 6 ตู้ จะทิ้งจดหมายได้กี่วิธี

2. ทะเบียนรถยนต์แบบเก่ากำหนดให้ ขึ้นต้นด้วยตัวเลข 1 ตัวที่ไม่ใช่เลข 0 ตามด้วยพยัญชนะภาษาไทย 1 ตัวและหลังจากนั้นจะตามด้วยเลข 4 หลัก ต้องการทราบว่าจะสร้างทะเบียนรถยนต์ได้กี่หมายเลข ถ้า
   2.1 ไม่ให้ใช้ตัวเลขซ้ำกันเลย
   2.2 ใช้ตัวเลขซ้ำกันได้

3. หากมีที่ว่าง 5 ที่บนหิ้ง จะสามารถจัดหนังสือ 8 เล่มไปวางได้กี่วิธี

4. หากจะทิ้งไพ่ทีละใบ จำนวน 3 ใบ ออกจากสำรับได้กี่วิธี ถ้า
   4.1 ดึงแล้วใส่กลับคืน
   4.2 ดึงแล้วไม่ใส่กลับคืน

5. บริษัท 4 แห่งต้องการรับสมัครพนักงาน 3 คน, 2 คน, 4 คน และ 5 คนตามลำดับ ถ้ามีผู้สมัครเข้าทำงาน 14 คนพอดี จงหาจำนวนวิธีที่จะบรรจุคนทั้ง 14 เข้าทำงานทุกบริษัท

6. ถ้าจะให้ชาย 3 คน หญิง 3 คน นั่งล้อมกันเป็นวงกลม จะนั่งได้กี่วิธี ถ้า
   6.1 ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
   6.2 หญิง 2 คนพิเศษต้องไม่ชิดกัน
   6.3 หญิงแต่ละคน ต้องถูกขนาบข้างด้วยชาย 2 คน

7. มีสถานีรถไฟอยู่ 50 สถานี หากบนตั๋วทุกใบมีชื่อสถานีต้นทางกับปลายทางระบุอยู่ด้วย จะต้องพิมพ์ตั๋วโดยสารไว้กี่แบบ และถ้าต้องการให้ตั๋วนั้นใช้ได้ระหว่าง 2 สถานีใด ๆ ได้ทั้ง 2 ทิศพร้อมกัน จะต้องพิมพ์ไว้กี่แบบ

8. ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 12 คน ต้องการเลือกบุตรมา 6 คน โดยทำหน้าที่ล้างถ้วยชาม 1 คน ถูกบ้าน 2 คน และดูแลต้นไม้ 3 คน จงหาว่าจำนวนวิธีการเลือกบุตรทั้ง 6 คน มาทำงาน

9. จงหาพจน์ที่ 5 ของ $(a + 2x^3)^{17}$

เอกสารอ้างอิง

วิทยา วัชระวิทยากุล และสมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. (2536). **คณิตศาสตร์ ดิสครีต เชิงประยุกต์ (Discrete Mathematics).** กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชัน.

Rosen Kenneth H. (1995). **Discrete mathematics and its application** (3^{rd} ed). Singapore: McGraw-Hill.