แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

2.1 ความนำ

2.2 สมมติฐานของบูลีน

2.3 ฟังก์ชันบูลีน

2.3.1 ส่วนเติมเต็ม

2.3.2 ผลรวมบูลีน

2.3.3 ผลคูณบูลีน

2.4 นิพจน์บูลีน

2.5 ดิวอัลลิตี

2.6 การกระจายผลบวกของผลคูณ

2.7 คุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบ

2.8 เกตตรรกะ

2.8.1 ประเภทของเกต

2.8.2 การประสมของเกต

2.8.3 วงจรบวก

2.8.4 การลดรูปวงจร

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาทราบเกี่ยวกับสมมติฐานของบูลีน ฟังก์ชันบูลีน และนิพจน์บูลีน
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถหาคำตอบของนิพจน์บูลีนจากตัวแปรบูลีนที่ถูกดำเนินการได้
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจในเรื่องการกระจายผลบวกของผลคูณ
4. เพื่อให้ผู้ศึกษาเรียนรู้เกตตรรกะ การประสมของเกตและตัวดำเนินการของเกต
5. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถลดรูปวงจรได้

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็ปเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท

บทที่ 2

พีชคณิตบูลีน

2.1 ความนำ

พีชคณิตของบูลีน (boolean algebra) เป็นคณิตศาสตร์เกี่ยวกับตรรกวิทยา ที่มีค่าของตัวแปรเพียง 2 ค่า คือ 0 กับ 1 นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ จอร์จ บูล (George Boole) เป็นผู้คิดค้นเมื่อปี ค.ศ. 1854 (Rosen, 1995, p.608) เป็นแนวทางที่ทำให้สามารถพัฒนาคณิตศาสตร์แนวใหม่ได้หลายสาขา สมการที่สร้างมาจากพีชคณิตนี้เรียกว่าสมการบูลีน หรือเรียกว่าสมการตรรกศาสตร์ (logic equation) ในระยะแรกยังไม่ได้นำมาใช้ในวงการอิเล็กทรอนิกส์ จนกระทั่งปี ค.ศ.1938 แชนนอน (Claude E. Shannon) ได้นำเอาพีชคณิตของบูลีนมาใช้ออกแบบวงจรสวิตซ์รีเลย์สำหรับระบบโทรศัพท์ จนเป็นที่ยอมรับแพร่หลาย (Rosen, 1995, p.608) กอปรกับวงจรรีเลย์คล้ายคลึงกับการทำงานของทรานซิสเตอร์ ทำให้ประยุกต์มาสู่การออกแบบวงจรภายในเครื่องคอมพิวเตอร์ในที่สุด

2.2 สมมติฐานของบูลีน

พีชคณิตบูลีนนั้นมีสมมติฐานที่เป็นพื้นฐาน 7 สมมติฐาน ซึ่งนำไปใช้สร้างทฤษฎีและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ (ประทีป บัญญัตินพรัตน์, 2532, หน้า 84)

สมมติฐานที่ 2.1 คำจำกัดความ

คำกำจัดความของพีชคณิตบูลีน คือ เป็นระบบพีชคณิตที่ประกอบด้วย เซต K ที่มีสมาชิก (element) อยู่ 2 ตัวหรือมากกว่า ประกอบด้วยตัวดำเนินการ (operator) อีก 2 ตัวคือ $\cdot$ และ $+$ กล่าวได้ว่า สำหรับทุก ๆ ค่าของ a และ b ที่อยู่ในเซต K ค่า $a \cdot b$ และ $a+b$ จะอยู่ในเซต K เครื่องหมาย + เรียกว่า ออร์ (or) และเครื่องหมาย $\cdot$ เรียกว่าแอนด์ (and) มีความหมายเหมือนตัวเชื่อม หรือ กับ และ ของตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์

สมมติฐานที่ 2.2 กฎการแทนค่า

กฎการแทนค่า (substitution law) กล่าวว่านิพจน์ 2 นิพจน์ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อสามารถแทนนิพจน์หนึ่งด้วยอีกนิพจน์หนึ่งได้

สมมติฐานที่ 2.3 กฎการคงอยู่ของ 1 และ 0

กฎการคงอยู่ของ 1 และ 0 (existence of 1 and 0 law) กำหนดว่าเมื่อมี 1 และ 0 เป็นสมาชิกของเซต K แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่าของ a ที่อยู่ในเซต K จะได้

สมมติฐานที่ 2.3.1 $a + 0 = a$

สมมติฐานที่ 2.3.2 $a \cdot 1 = a$

สมมติฐานที่ 2.4 กฎการสลับที่

กฎการสลับที่ (commutative laws) สำหรับทุก ๆ ค่าของ a และ b ที่อยู่ในเซต K

สมมติฐานที่ 2.4.1 $a + b = b + a$

สมมติฐานที่ 2.4.2 $a \cdot b = b \cdot a$

สมมติฐานที่ 2.5 กฎการจัดหมู่

กฎการจัดหมู่ (associative laws) สำหรับทุก ๆ ค่าของ a และ b ที่อยู่ในเซต K

สมมติฐานที่ 2.5.1 $a+(b+c)=(a+b)+c$

สมมติฐานที่ 2.5.2 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

สมมติฐานที่ 2.6 กฎการกระจาย

กฎการกระจาย (distribute laws) สำหรับทุก ๆ ค่าของ a และ b ที่อยู่ในเซต K

สมมติฐานที่ 2.4.1 $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$

สมมติฐานที่ 2.4.2 $a\cdot(b+c)= (a\cdot b)+(a\cdot c)$

สมมติฐานที่ 2.7 กฎของส่วนเติมเต็ม

กฎของส่วนเติมเต็ม (complement law) สำหรับทุก ๆ ค่าของ a ที่อยู่ในเซต K จะมี $\bar{a}$ ที่อยู่ในเซต K และทำให้

สมมติฐานที่ 2.7.1 $a+\bar{a}=1$

สมมติฐานที่ 2.7.2 $a\cdot 1=0$

2.3 ฟังก์ชันบูลีน

ฟังก์ชันบูลีน (function boolean) เป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเซต K = {0,1} และ 3 ตัวดำเนินการของพีชคณิตของบูลีน ซึ่งคล้ายกับตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ โดยแสดงการเปรียบเทียบได้ ดังตารางที่ 2.1 ตัวดำเนินการบูลีนมี 3 ชนิดคือ

2.3.1 ส่วนเติมเต็ม

ส่วนเติมเต็ม (complement) เป็นตัวดำเนินการที่คล้ายกับตัวดำเนินการนิเสธของตรรกศาสตร์ จะทำหน้าที่กลับค่าของบูลีนให้ตรงกันข้ามกับค่าที่มี ส่วนเติมเต็มของ a เขียนแทนด้วย $\bar{a}$ กำหนดค่าส่วนเติมเต็มของ $\bar{1} = 0$ และ $\bar{0} = 1$

2.3.2 ผลรวมบูลีน

ผลรวมบูลีน (boolean sum) เป็นตัวดำเนินการที่คล้ายกับตัวดำเนินการตัวเชื่อมหรือของตรรกศาสตร์ ซึ่งจะให้ค่าเท็จ (0) ก็ต่อเมื่อตัวแปรทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นเท็จ (0) ทั้งคู่ นอกนั้นจะเป็นจริง (1) ทั้งหมดแทนด้วยเครื่องหมาย + หรือ OR กำหนดค่าผลรวมบูลีนได้เป็น 1+1 = 1, 1+0 = 1, 0+1 = 1 และ 0+0 = 0

2.3.3 ผลคูณบูลีน

ผลคูณบูลีน (boolean product) เป็นตัวดำเนินการที่คล้ายกับตัวดำเนินการตัวเชื่อมหรือของตรรกศาสตร์ ซึ่งจะให้ค่าจริง (1) ก็ต่อเมื่อตัวแปรทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นจริง (1) ทั้งคู่ นอกนั้นจะเป็นเท็จ (0) ทั้งหมดแทนด้วยเครื่องหมาย $\cdot$ หรือ AND กำหนดค่าผลคูณบูลีน ได้เป็น $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$ และ $0 \cdot 0 = 0$

ตารางที่ 2.1 แสดงตัวดำเนินการบูลีนเทียบกับตัวดำเนินการตรรกะ

ตัวดำเนินการบูลีน	ตัวดำเนินการตรรกะ
Complement –	~, ¬
Sum +	∨
Product ·	∧

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าของ $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)}$

วิธีทำ $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0+\bar{1}$

$= 0+0$

$= 0$ ▮

2.4 นิพจน์บูลีน

ในนิพจน์บูลีนมีตัวดำเนินการปนกัน ถ้าไม่มีเครื่องหมายวงเล็บกำหนดให้กระทำการใดก่อนหลัง ในดำเนินการเรียงลำดับคือ ทำส่วนเติมเต็มก่อน จากนั้นทำผลคูณ และท้ายสุดจึงทำผลบวกของบูลีน โดยสามารถเขียนฟังก์ชันบูลีนด้วยนิพจน์บูลีนจำเป็นต้องประกอบด้วยค่าคงที่ของบูลีน ตัวแปรบูลีน และตัวดำเนินการบูลีน

นิยามที่ 2.1 กำหนดให้ $B = \{0,1\}$ ตัวแปร x จะเรียกว่าตัวแปรบูลีน ถ้า x มีค่าที่เอามาจาก B เท่านั้น ฟังก์ชันบูลีนของกำลัง n จะเป็นฟังก์ชันจาก $B^n \rightarrow B$ เมื่อ

$B^n = \{(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n) \mid x_1 \in B, 1 \leq i \leq n\}$

นิยามที่ 2.2 นิพจน์บูลีนสามารถกำหนดแบบเวียนเกิด (recursive) ดังนี้ $0, 1, x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ เป็นนิพจน์บูลีน (x_i เป็น ตัวแปรบูลีน)

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นนิพจน์บูลีนแล้ว

$\bar{E}_1$, $(E_1 E_2)$ และ $(E1+E_2)$ จะเป็นนิพจน์บูลีนด้วย

ฟังก์ชันบูลีนสามารถจะแทนด้วยนิพจน์บูลีนซึ่งสร้างมาจากตัวแปรบูลีน และ ตัวดำเนินการบูลีน (Johnsonbaugh,1984, p.260)

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาค่าของฟังก์ชันบูลีนซึ่งแทนด้วย $F(x,y,z) = xy + \bar{z}$

วิธีทำ ค่าของฟังก์ชันบูลีน แสดงได้ดังตารางที่ 2.2 ∎

ตารางที่ 2.2 ฟังก์ชันบูลีนแทนด้วย $F(x,y,z) = xy + \bar{z}$

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

ฟังก์ชันบูลีน F และ G ของตัวแปร n จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ $F(b_1,\ldots,b_n) = G(b_1\ldots b_n)$ นิพจน์บูลีน F และ G จะสมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ F , G แทนด้วยฟังก์ชันเดียวกัน ตัวอย่างเช่น xy, xy+0, $xy \cdot 1$ จะสมมูลกัน

ส่วนเติมเต็ม ของ F คือ $\bar{F}$ กำหนดดังนี้

$$\bar{F}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{F(x_1,\ldots,x_n)}$$

ผลรวมบูลีน ของ F และ G คือ F+G

ผลคูณบูลีน ของ F และ G คือ $F \cdot G$

$$(F+G)(x_1\ldots x_n) = F(x_1\ldots x_n)+G(x_1\ldots x_n)$$

$$(FG)(x_1\ldots x_n) = F(x_1\ldots x_n)G(x_1\ldots x_n)$$

ตัวอย่างที่ 2.3 จะมีจำนวนฟังก์ชันบูลีนที่ต่างกันทั้งหมดจำนวนเท่าไร ถ้าเป็นดีกรี f

วิธีทำ F ดีกรี n จะมี n ตัวแปร แต่ละตัวแปรสามารถจะกำหนดค่า 0,1

$\therefore$ จะมีค่า n แตกต่างกัน 2^n ค่า

$\therefore$ ฟังก์ชันบูลีน จะมีค่าได้ทั้งหมด 2^{2^n} ค่าที่แตกต่างกัน

ดังตารางที่ 2.3

ตัวอย่างฟังก์ชันบูลีนของกำลัง 2

มี F ได้ 16 รูปแบบตั้งแต่ 0000….1111

ตารางที่ 2.3 แสดงจำนวนของบูลีนฟังก์ชันดีกรี n

กำลัง	จำนวน
1	2
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

ที่มา (Rosen, 1995, p.611)

ตารางที่ 2.4 แสดงคุณสมบัติของบูลีน

คุณสมบัติ	ชื่อเรียก
$\bar{\bar{x}} = x$	กฎทวิส่วนเติมเต็ม
$x+x=x$ $x \cdot x=x$	กฎการกระทำเอง
$x+0=x$ $x \cdot 1=x$	กฎเอกลักษณ์
$x+1=1$ $x \cdot 0=0$	กฎการครอบงำ
$x+y=y+x$ $xy = yx$	กฎการสลับที่
$x+(y+z) = (x+y)+z$ $x(yz) = (xy)z$	กฎการจัดหมู่
$x+yz = (x+y)(x+z)$ $x(y+z) = xy+xz$	กฎการกระจาย
$\overline{xy} = \bar{x}+\bar{y}$ $\overline{x+y} = \bar{x}\bar{y}$	กฎเดอมอแกน

ที่มา (Rosen, 1995, 612)

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาแสดงว่ากฎการกระจาย x(y+z)=xy+xz ถูกต้อง

วิธีทำ โดยใช้การตรวจสอบทุกค่า ที่เป็นไปได้ของ x,y,z ซึ่งจะมี $2^3 = 8$ กรณี แสดงดังตารางที่ 2.5 โดย x(y+z)=xy+xz พิจารณาจากค่าในสดมภ์ที่ 4 และ 5 ▮

ตารางที่ 2.5 แสดงกฎการกระจาย x(y+z)=xy+xz

x	y	z	x(y+z)	xy+xz
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

ตัวอย่างที่ 2.5 จงพิสูจน์กฎการดูดซับ ของ x(x+y)=x

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x(x+y) &= (x+0)(x+y) \\ &= x+0\cdot y \\ &= x+y\cdot 0 \\ &= x+0 \\ &= x \end{aligned}$$

▮

ตัวอย่างที่ 2.6 จงพิสูจน์กฎการดูดซับของ x+xy=x

วิธีทำ $x+xy = (x \cdot 1)(x \cdot y)$

$= x(y+1)$

$= x \cdot 1$

$= x$ ▮

2.5 ดิวอัลลิตี

ดิวอัลลิตี (duality) เป็นกฎที่มีความสำคัญในพีชคณิตบูลีน ใช้หลักการแทนตัวดำเนินการผลรวมบูลีน (+) ด้วยผลคูณบูลีน (·) แทนผลคูณบูลีนด้วยผลรวมบูลีน และแทน 1 ด้วย 0 แทน 0 ด้วย 1 ของนิพจน์บูลีน ดิวอัลลิตีของฟังก์ชันบูลีน F เขียนแทนด้วย F^d และถ้า F = G แล้ว $F^d = G^d$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาดิวอัลลิตีของ x(y+0) และ $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$

วิธีทำ ดิวอัลลิตีของ x(y+0) คือ $x+(y \cdot 1)$

ดิวอัลลิตีของ $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$ คือ $(\bar{x} + 0) \cdot (\bar{y} \cdot z)$ ▮

ตัวอย่างที่ 2.8 จงพิสูจน์กฎการดูดซับโดยใช้หลักการดิวอัลลิตี

วิธีทำ $x(x+y) = x$

หาดิวอัลลิตีทั้ง 2 ข้าง

$x + x \cdot y = x$ ▮

ทฤษฎีบทที่ 2.1 กฎการกระทำเอง

ทฤษฎีบทที่ 2.1.1 $a + a = a$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.2 $a \cdot a = a$

พิสูจน์ที่ 2.1 ในที่นี้จะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.1.1 หรือ 2.1.2 ข้อใดข้อหนึ่งแล้ว ใช้ทฤษฎีของดิวอัลลิตี พิสูจน์ข้อที่เหลือในทฤษฎีจะพิสูจน์ข้อที่ 2.1.1 ดังนี้

a+a	= a+a	
	= (a+a) · 1	สมมติฐานที่ 2.3.2
	= (a+a) (a+ $\bar{a}$)	สมมติฐานที่ 2.7.1
	= a+a $\bar{a}$	สมมติฐานที่ 2.6.1
	= a+0 · 1	สมมติฐานที่ 2.7.1
	= a	สมมติฐานที่ 2.3.1

สามารถพิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 2.1.1 ว่า a+a = a ได้ กรณีทฤษฎีบทที่ 2.1.2 ก็หาดิวอัลลิตี ของ a+a ได้ a · a และ ดิวอัลลิตีของ a คือ a ฉะนั้นได้ a+a = a ตามทฤษฎีบทที่ 2.1.2 หรือหากจะพิสูจน์โดยตรงก็ทำได้ ดังนี้

a•a	= a•a	
	= a•a+0	สมมติฐานที่ 2.3.2
	= a•a+(a+ $\bar{a}$)	สมมติฐานที่ 2.7.2
	= a(a+ $\bar{a}$)	สมมติฐานที่ 2.6.2
	= a•1	สมมติฐานที่ 2.7.2
	= a	สมมติฐานที่ 2.3.2

ทฤษฎีบทที่ 2.2 กฎเอกลักษณ์

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1 a+1 = 1

ทฤษฎีบทที่ 2.2.2 a•0 = 0

พิสูจน์ที่ 2.2 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ได้ดังนี้

$a+1$	$= a+1$	
	$= (a+1)\cdot 1$	สมมติฐานที่ 2.3.2
	$= 1\cdot(a+1)$	สมมติฐานที่ 2.4.2
	$= (a+1)(a+\bar{a})$	สมมติฐานที่ 2.7.1
	$= a+\bar{a}\cdot 1$	สมมติฐานที่ 2.6.1
	$= a+\bar{a}$	สมมติฐานที่ 2.3.2
	$= 1$	

ได้ $a+1 = 1$ ตามต้องการ เมื่อใช้ทฤษฎีของดิวอัลลิตีกับทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ก็จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.2.2 ได้

ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีต่อไป สามารถสรุปเกี่ยวกับค่า 1 และ 0 จากสมมติฐานและทฤษฎีกล่าวมาจนขณะนี้ได้ คือ

$a+0$	$= 0$	$a+1$	$= 1$
$a\cdot 0$	$= 0$	$a\cdot 1$	$= 1$
$\bar{0}$	$= 1$	$\bar{1}$	$= 0$

ดูจากตารางข้างบนจะเห็นว่าตัวดำเนินการ · (แอนด์) นั้นก็เหมือนกับการคูณเลขธรรมดาทั่ว ๆ ไป แต่ตัวดำเนินการ + (ออร์) นั้นจะต่างไปจากการบวกเลขทั่ว ๆ ไป

ทฤษฎีบทที่ 2.3 กฎการดูดซับ

ทฤษฎีบทที่ 2.3.1 $a+ab = a$

ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 $a(a+b) = a$

พิสูจน์ที่ 2.3 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.3.1

$a+ab$	$= a+ab$	
	$= a\cdot 1+ab$	สมมติฐานที่ 2.3.2
	$= a(1+b)$	สมมติฐานที่ 2.6.2
	$= a(b+1)$	สมมติฐานที่ 2.4.2
	$= a\cdot 1$	ทฤษฎีบทที่ 2.2.1
	$= a$	สมมติฐานที่ 2.3.2

ในการพิสูจน์ทุกทฤษฎี กระทำได้โดยการคิดว่า สมาชิก a ในทฤษฎีบทที่ 2.9 นั้นเป็นสมาชิกอื่น ๆ เช่น $a+1 = 1$, $b+1 = 1$, $x+1 = 1$ หรือ $z+1 = 1$

ทฤษฎีบทที่ 2.4

ทฤษฎีบทที่ 2.4.1 $a+\bar{a}b \quad = a+b$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.2 $a(\bar{a}+b) \quad = ab$

พิสูจน์ที่ 2.4 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.4.2

$a(\bar{a}+b)$	$= a(\bar{a}+b)$	
	$= a\bar{a}+ab$	สมมติฐานที่ 2.6.2
	$= 0+ab$	สมมติฐานที่ 2.7.2
	$= ab+0$	สมมติฐานที่ 2.4.1
	$= ab$	สมมติฐานที่ 2.3.1

การนำเอาทฤษฎีนี้ไปใช้งานนี้ พจน์ทั้ง 2 ในนิพจน์จะต้องประกอบด้วยค่าปกติของตัวแปรพจน์หนึ่ง และอีกพจน์หนึ่งเป็นค่าที่ประกอบขึ้นจากค่าตรงกันข้าม ดังตัวอย่างนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $xy + \overline{xyz}$	$=$ xy+z	ทฤษฎีบทที่ 2.4.1
(2) $\bar{x} + xy$	$= \bar{x} + xy$	สมมติฐานที่ 2.4.2
	$= \bar{x} + y$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.1
(3) $x(\bar{x} + z)(p + a)$	$= xz(p + a)$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.2
(4) $\bar{x}(x + z) + \bar{a} + ax$	$= \bar{x}z + \bar{a} + az$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.2
	$= \bar{x}z + \bar{a} + z$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.1
	$= \bar{a} + z + \bar{x}z$	สมมติฐานที่ 2.4.1
	$= \bar{a} + z + z\bar{x}$	สมมติฐานที่ 2.4.2
	$= \bar{a} + z$	ทฤษฎีบทที่ 2.3.1

ทฤษฎีบทที่ 2.5 กฎของเดอมอร์แกน

ทฤษฎีบทที่ 2.5.1 $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$

ทฤษฎีบทที่ 2.5.2 $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

พิสูจน์ที่ 2.5 แทนการพิสูจน์โดยตรง ใช้วิธีการต่อไปนี้ จากทฤษฎีบทที่ 2.5.1

ถ้า	x	= a+b	
ฉะนั้น	$\bar{x}$	$= \overline{a + b}$	สมมติฐานที่ 2.7
และ	$x \cdot \bar{x}$	= 0 , $x + \bar{x}$ = 1	

หากมี Y และสามารถพิสูจน์ได้ว่า $x \cdot y$ = 0 และ $x + y$ =1 แล้วจะได้ว่า $y = \bar{x}$

สมมติว่า $y = \bar{a}\bar{b}$ หาค่า $x + y$ และ $x \cdot y$

$x \cdot y$	$= (a + b)(\bar{a}\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.2
	$= (a + b)(\bar{a}\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.4.2
	$= (\bar{a}\bar{b})a + (\bar{a}\bar{b})b$	สมมติฐานที่ 2.6.2
	$= a(\bar{a}\bar{b}) + (\bar{a}\bar{b})b$	สมมติฐานที่ 2.4.2

	$= (a\bar{a})\bar{b} + \bar{a}(b\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.5.2
	$= 0 \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot 0$	สมมติฐานที่ 2.7.2, 2.4.2
	$= 0 + 0$	ทฤษฎีบทที่ 2.2.2
	$= 0$	สมมติฐานที่ 2.3.1
$x + y$	$= (a+b) + (\bar{a}\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.2
	$= (b+a) + (\bar{a}\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.4.1
	$= b + (a + \bar{a}\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.5.1
	$= b + (a + \bar{b})$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.1
	$= (a + \bar{b}) + b$	สมมติฐานที่ 2.4.1
	$= a + (\bar{b} + b)$	สมมติฐานที่ 2.5.1
	$= a + (b + \bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.5.1
	$= a + 1$	สมมติฐานที่ 2.7.1
	$= 1$	ทฤษฎีบทที่ 2.2.1

ฉะนั้น ได้ $y = \bar{x}$

หรือ $\bar{a}\bar{b} = \overline{a+b}$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 สามารถขยายเป็นนิพจน์ที่ประกอบด้วยตัวแปรหลาย ๆ ตัว ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.6.1 $\overline{a+b+c+......+z} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot..........\cdot\bar{z}$

ทฤษฎีบทที่ 2.6.2 $\overline{abc......................z} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+...+\bar{z}$

การพิสูจน์ก็ทำได้เช่นเดียวกัน โดยการสมมติค่า y และ $\bar{x}$ ที่ประกอบด้วยตัวแปรทุกตัวในเอกเพรสชั่นข้างบน ดังเช่นตัวอย่างการนำเอาทฤษฎีบทที่ 2.4 และ 2.5 ไปใช้งาน

(1) $\overline{x+y}$	$= \bar{x}\bar{\bar{y}}$	ทฤษฎีบทที่ 2.5.1
	$= \bar{x}y$	กฎทวิส่วนเติมเต็ม

(2) $\overline{\bar{x}z} \quad = \bar{\bar{x}} + \bar{z}$ ทฤษฎีบทที่ 2.5.2

$= x + \bar{z}$ กฎทวิส่วนเติมเต็ม

(3) $\overline{a + a\bar{c} + yz} \quad = \bar{a} \cdot \overline{a\bar{c}} \cdot \overline{yz}$ ทฤษฎีบทที่ 2.5.1

$= \bar{a}(\bar{a} + c)(\bar{y} + \bar{z})$ กฎทวิส่วนเติมเต็ม

$= \bar{a}(\bar{y} + \bar{z})$ ทฤษฎีบทที่ 2.3.2

ทฤษฎีบทที่ 2.7 การลดทอน

ทฤษฎีบทที่ 2.7.1 $ab + \bar{a}c + bc \quad = \quad ab + \bar{a}c$

ทฤษฎีบทที่ 2.7.2 $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) \quad = \quad (a + b)(a + \bar{c})$

พิสูจน์ที่ 2.7 ในการพิสูจน์ต่อไปนี้ เมื่อใช้สมมติฐานที่ 2.4 และ 2.5 จะไม่เขียนกำกับไว้ จาก ทฤษฎีบทที่ 2.7.1 ดังนี้

$ab + \bar{a}c + bc \quad = ab + \bar{a}c + bc$

$= ab + \bar{a}c + 1 \cdot bc$ สมมติฐานที่ 2.3.2

$= ab + \bar{a}c + (a + \bar{a})bc$ สมมติฐานที่ 2.7.1

$= ab + \bar{a}c + abc + \bar{a}bc$ สมมติฐานที่ 2.6.2

$= (ab + abc) + (\bar{a}c + \bar{a}bc)$

$= ab + \bar{a}c$ ทฤษฎีบทที่ 2.3.1

ตัวอย่างการนำทฤษฎีนี้ไปใช้งาน

(1) $ab + \bar{a}cd + bcd \quad = ab + \bar{a}cd$ ทฤษฎีบทที่ 2.7.1

(2) $\bar{a}x + a(z + w) + x(z + w) = ax + a(z + w)$ ทฤษฎีบทที่ 2.7.1

(3) $(a + \bar{b}) + (\bar{a} + c)(\bar{b} + c) \quad = (a + \bar{b})(\bar{a} + c)$ ทฤษฎีบทที่ 2.7.1

(4) $(x+y)z+\bar{x}\bar{y}w+zw$ $= (x+y)z+(\overline{x+y})w+zw$

ทฤษฎีบทที่ 2.5.1

$= (x+y)z+\overline{(x+y)w}$

ทฤษฎีบทที่ 2.7.1

ทฤษฎีบทที่ 2.8

ทฤษฎีบทที่ 2.8.1 $ab+a\bar{b} = a$

ทฤษฎีบทที่ 2.8.2 $(a+b)(a+\bar{b}) = a$

ทฤษฎีนี้เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของสมมติฐานที่ 2.7 ที่ใช้กันมากจนยอมรับเป็นทฤษฎี

พิสูจน์ที่ 2.8 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.8.1

$ab+a\bar{b}$	$= ab+a\bar{b}$	สมมติฐานที่ 2.6.2
	$= a(b+\bar{b})$	สมมติฐานที่ 2.7.1
	$= a\cdot 1$	สมมติฐานที่ 2.3.2
	$= a$	

ทฤษฎีบทที่ 2.9

ทฤษฎีบทที่ 2.9.1 $ab+a\bar{b}c = ab+ac$

ทฤษฎีบทที่ 2.9.2 $(a+b)(a+\bar{b}+c) = (a+b)(a+c)$

ทฤษฎีนี้เป็นรูปแบบหนึ่งของทฤษฎีบทที่ 2.4

พิสูจน์ที่ 2.9 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.9.1

$ab+a\bar{b}c$	$= ab+a\bar{b}c$	
	$= a(b+\bar{b}c)$	สมมติฐานที่ 2.6.2
	$= a+(b+c)$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.1
	$= ab+ac$	สมมติฐานที่ 2.6.2

ทฤษฎีบทที่ 2.10

ทฤษฎีบทที่ 2.10.1 $ab + \bar{a}c = (a + c)(\bar{a} + b)$

ทฤษฎีบทที่ 2.10.2 $(a + b)(\bar{a} + c) = (ac) + (\bar{a}b)$

ทฤษฎีนี้มีประโยชน์สำหรับการเปลี่ยนรูปแบบของนิพจน์บูลีน จากรูปหนึ่งไปยังอีกรูปหนึ่ง

พิสูจน์ที่ 2.10 พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.10.1

$ab + \bar{a}c$	$= ab + \bar{a}c$	
	$= (ab + \bar{a})(ab + c)$	สมมติฐานที่ 2.6.1
	$= (a + \bar{a})(b + \bar{a})(a + c)(b + c)$	สมมติฐานที่ 2.6.1
	$= 1 \cdot (\bar{a} + b)(a + c)(b + c)$	สมมติฐานที่ 2.7.1
	$= (\bar{a} + b)(a + c)(b + c)$	สมมติฐานที่ 2.3.2
	$= (\bar{a} + b)(a + c)$	ทฤษฎีบทที่ 2.7.2

ตัวอย่างการนำเอาทฤษฎีบทที่ 2.8, 2.9 และ 2.10 ไปใช้งาน

(1) $\bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$	$= \bar{a}b$	ทฤษฎีบทที่ 2.8.1
(2) $\bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c$	$= \bar{a}c$	ทฤษฎีบทที่ 2.8.1
(3) $(P + \bar{Q})(P + Q + Z)$	$= (P + \bar{Q})(P + Z)$	ทฤษฎีบทที่ 2.9.2
	$= P + \bar{Q}Z$	สมมติฐานที่ 2.6.1
(4) $\bar{x}\bar{z} + x\bar{z}w + zw$	$= \bar{x}\bar{z} + \bar{z}w + zw$	ทฤษฎีบทที่ 2.9.1
	$= \bar{x}\bar{z} + w$	ทฤษฎีบทที่ 2.8.1
	$= (\bar{x} + w)(w + \bar{z})$	สมมติฐานที่ 2.6.1
(5) $\bar{x}\bar{z} + x\bar{z}w + zw$	$= (\bar{x} + z)(x + z)(x + \bar{y})$	ทฤษฎีบทที่ 2.10.1
	$= (\bar{x} + z)x$	ทฤษฎีบทที่ 2.8.2
	$= zw$	ทฤษฎีบทที่ 2.4.2

2.6 การกระจายผลบวกของผลคูณ

การแทนฟังก์ชันบูลีน เป็นการหานิพจน์บูลีนซึ่งอยู่ในรูปผลบวกของนิพจน์สั้น โดยแต่ละนิพจน์สั้นแทนแต่ละกรณีผสมค่าตัวแปรที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่า 1 ซึ่งการแทนฟังก์ชันบูลีนวิธีนี้เรียกว่า การกระจายผลบวกของผลคูณ (sum of products expansion หรือ การหา disjunctive normal form) (วิทยา วัชระวิทยากุล และ สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล, 2536, หน้า 310)

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหานิพจน์บูลีน ซึ่งแทนฟังก์ชัน F(x,y,z) และ G(x,y,z) ซึ่งกำหนดค่าดังนี้

วิธีทำ นิพจน์บูลีน แสดงได้ดังตารางที่ 2.6 ∎

ตารางที่ 2.6 นิพจน์บูลีน แทนฟังก์ชัน F(x,y,z) และ G(x,y,z)

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

พิจารณา F เป็น 1 เมื่อ x = 1 , y = 0 , z = 1 และเป็น 0 กรณีอื่นๆ

$x.\bar{y}.z = 1$ กรณีเดียว คือ $x = \bar{y} = z$ หรือ x = 1 , y = 0, z = 1

$\therefore$ F(x,y,z) = $x.\bar{y}.z$ ∎

พิจารณา G เป็น 1 เมื่อ x = y=1 , z = 0

และ x = 0, y = 1, z = 0

อาจจะสร้างจากนิพจน์บูลีน โดยใช้ผลรวมบูลีนของ 2 พจน์

$xy\bar{z} = 1$ เมื่อ x = 1, y = 1, z = 0

$\bar{x}y\bar{z} = 1$ เมื่อ x = 0 , y = 1 , z = 0

$\therefore$ G(x,y,z) = $xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ ▮

นิยามที่ 2.3 พจน์สั้น (minterm) ของตัวแปรบูลีน $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น B.product $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เมื่อ $y_i = x_i$ หรือ $\bar{x}_i = \bar{y}_i$

สัญพจน์ (literal) เป็นตัวแปรบูลีน หรือส่วนเติมเต็มของตัวแปร

พจน์สั้น คือผลคูณของ n สัญพจน์ ซึ่ง 1 สัญพจน์ สำหรับ 1 ตัวแปร

พจน์สั้นมีค่าเท่ากับ 1 สำหรับการประสมของตัวแปรใด ในการประสมหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาพจน์สั้น ซึ่ง = 1 ถ้า $x_1 = x_3 = 0$ และ $x_2 = x_4 = x_5 = 1$

วิธีทำ สำหรับ x_i ค่าอื่นๆ

พจน์สั้นมีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อทุกตัวแปร = 1

$\therefore$ ได้พจน์สั้น = 1 เมื่อ พจน์สั้น = $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$ ▮

ผลรวมของพจน์สั้นที่แทนฟังก์ชันจะเรียกว่าการกระจายผลบวกของผลคูณของฟังก์ชันบูลีน

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาการกระจายผลบวกของผลคูณ สำหรับฟังก์ชัน F(x,y,z) = (x+y)$\bar{z}$

วิธีทำ มีอยู่ 3 กรณีที่กำหนดให้ F = 1

$\therefore$ จะมี 3 พจน์สั้นบวกกัน

$\therefore$ (x,y,z) = $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ แสดงได้ดังตารางที่ 2.7 ▮

ตารางที่ 2.7 การกระจายผลบวกของผลคูณ สำหรับฟังก์ชัน $F(x,y,z) = (x+y)\bar{z}$

x	y	z	$(x+y)\bar{z}$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

ทำนองเดียวกัน สามารถจะหานิพจน์บูลีน โดยการใช้ B.product ของผลรวมบูลีนซึ่งเรียกว่าการกระจายผลคูณของผลบวก (product of sums expansion) หรือการหารูปแบบปกติของการเชื่อมกัน (conjunctive normal form) ซึ่งได้จากตารางคู่ของการกระจายผลบวกของผลคูณ

2.7 คุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบ

ฟังก์ชันบูลีนสามารถจะแสดงในรูปผลรวมบูลีนของพจน์สั้น โดยแต่ละพจน์สั้นถูกแสดงเป็นผลคูณบูลีน ของตัวแปรบูลีน ดังนั้นทุกฟังก์ชันบูลีนสามารถจะแทนด้วยตัวดำเนินการบูลีน +, ·, และ – ซึ่งตัวดำเนินการทั้ง 3 แบบ {·,+,–} มีคุณสมบัติเป็นเซตการทำงาน สมบูรณ์แบบอย่างไรก็ตาม เซตการทำงานสมบูรณ์แบบสามารถมีขนาดเล็กกว่านี้ได้ ด้วยการแทนตัวดำเนินการใดตัวดำเนินการหนึ่งในเซตข้างต้นด้วยตัวดำเนินการที่เหลือ โดยใช้กฎของเดอมอแกน ดังนิพจน์ตัวอย่างต่อไปนี้

$x+y=\overline{\bar{x}\bar{y}}$ ซึ่งสามารถแทนการ + ด้วย · และ – หรือ

เซต {·,–} มีคุณสมบัติสมบูรณ์แบบการทำงาน

$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$ ซึ่งสามารถแทนการ $\cdot$ ด้วย + และ – หรือ

เซต {+,–} มีคุณสมบัติสมบูรณ์แบบการทำงาน

แต่ {+, $\cdot$} ไม่เป็นคุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบเพราะไม่สามารถจะเขียน $F(x) = \bar{x}$ โดยใช้ + หรือ $\cdot$ ได้

อย่างไรก็ตาม เซตของการทำงานสมบูรณ์แบบข้างต้นที่มีขนาดเล็กเพราะมีเพียงตัวดำเนิน-การด้วยตัวดำเนินการแนน (NAND) หรือ | ซึ่งกำหนดการทำงานดังตารางที่ 2.8

ตารางที่ 2.8 ค่าตัวดำเนินการแนน

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

สามารถจะแสดงได้ว่าเซต { | } เป็นคุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบเพราะสามารถแทนการ $\cdot$ ด้วย – ดังนั้นเมื่อมีการสรุปว่าเซต { $\cdot$,–} มีคุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบแล้ว { | } จึงมีคุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบเช่นกัน พิสูจน์ได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

$\bar{x} = x|x$

$xy = (x|y)|(x|y)$

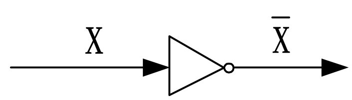
2.8 เกตตรรกะ

ในระบบคอมพิวเตอร์ อุปกรณ์ต่าง ๆ ประกอบด้วยวงจรอิเล็กโทรนิกส์จำนวนมาก โดยวงจรแต่ละวงจรได้ถูกออกแบบให้ทำงานโดยมีทางสำหรับรับค่าข้อมูลเข้าหรือสัญญาณเข้า และทางสำหรับผลลัพธ์หรือส่งสัญญาณออกไปสู่วงจรอื่น ซึ่งปกติมักแทนสัญญาณเข้าและออกด้วยค่าของเซต { 0,1 } ดังนั้นจึงสามารถแทนหน้าที่ของวงจรได้ด้วยพีชคณิตบูลีน โดยมีการแทนการรับเข้าด้วยตัวแปรของฟังก์ชันและแทนผลลัพธ์ด้วยค่าของฟังก์ชัน โดยใช้ส่วนประกอบพื้นฐานของวงจรที่เรียกว่าเกต (gate) อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ที่ออกจากเกตขึ้นอยู่กับค่ารับเข้าเท่านั้นจะไม่ขึ้นอยู่สถานะเดิมของวงจรในลักษณะไม่มีหน่วยความจำ

2.8.1 ประเภทของเกต

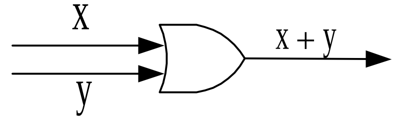
เนื่องจากเซต { +, ·, - } มีคุณสมบัติการทำงานสมบูรณ์แบบ ดังนั้นเกตจึงถูกแบ่งตามตัวเนินการในเซตดังกล่าว โดยมีการแบ่งเป็น 3 ประเภท คือ ตัวกลับค่า ออร์เกต และ แอนด์เกต

2.8.1.1 ตัวกลับค่า (inverter) รับค่าเข้า 1 ตัวของตัวแปรบูลีนแล้วให้ผลลัพธ์ออกไปเป็นส่วนเติมเต็มของตัวแปรนั้น



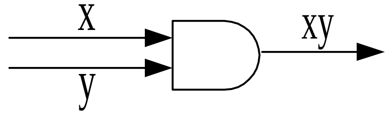
รูปที่ 2.1 ตัวกลับค่า

2.8.1.2 ออร์เกต (OR gate) รับค่าเข้า 2 ตัวของตัวแปรบูลีนแล้วให้ผลลัพธ์ออกไปเป็นผลรวมบูลีนของตัวแปรนั้น ๆ (x+y)



รูปที่ 2.2 ออร์เกต

2.8.1.3 แอนด์เกต (AND gate) รับค่าเข้า 2 ตัว ของตัวแปรบูลีนแล้วให้ผลลัพธ์ออกไปเป็นผลคูณบูลีนของตัวแปร 2 ตัวนั้น (x·y)



รูปที่ 2.3 แอนด์เกต

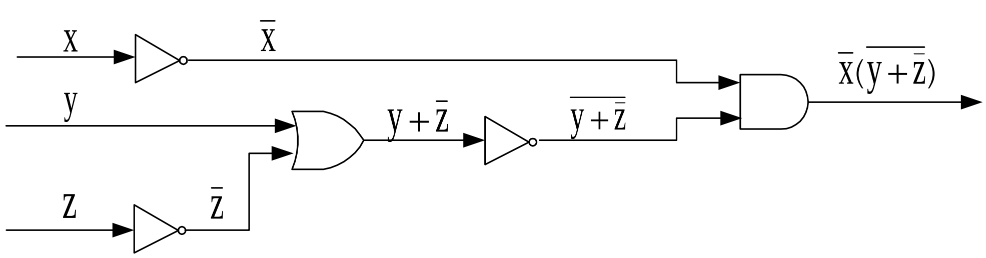
หมายเหตุ แอนด์เกต และออร์เกต อาจจะรับค่าเข้ามากกว่า 2 ตัวได้

2.8.2 การประสมของเกต

การประสมของเกต (combination of gates) อาจจะนำเกตหลาย ๆ ตัว มาต่อกันเพื่อให้ทำงานมากขึ้น ดังตัวอย่างที่ 2.12 จนถึงตัวอย่างที่ 2.14

ตัวอย่างที่ 2.12 จงออกแบบวงจร ซึ่งให้ผลลัพธ์ $\bar{x}(\overline{y+\bar{z}})$

วิธีทำ แสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 2.4 ▮



รูปที่ 2.4 วงจร $\bar{x}(\overline{y+\bar{z}})$

ตัวอย่างที่ 2.13 คณะกรรมการประกอบด้วย 3 คน แต่ละคนจะตอบ “ใช่” หรือ ”ไม่” เท่านั้น ผลการลงคะแนนจะชนะ ก็ต่อเมื่อมีอย่างน้อย 2 คนลงคะแนนให้ จงออกแบบวงจรที่ใช้ตรวจสอบว่าผลการลงคะแนนว่าผ่านหรือไม่

วิธีทำ กำหนดให้การลงคะแนน ใช่ = 1

ไม่ = 0

การลงคะแนนจะผ่านถ้ามีอย่างน้อย 2 คนลงคะแนนให้

อาจจะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่ง คือ

x,y	ลงคะแนน	ใช่	ผลที่ได้	=	1
x,z	ลงคะแนน	ใช่	ผลที่ได้	=	1
y,z	ลงคะแนน	ใช่	ผลที่ได้	=	1
x,y,z	ลงคะแนน	ใช่	ผลที่ได้	=	1

ดังนั้นวงจรจะเกี่ยวข้องกับผลที่ได้และการบวก นั่นคือ xy+xz+yz

(เพราะกรณีใดกรณีหนึ่งเกิดขึ้นก็ได้) ▌

ตัวอย่างที่ 2.14 การควบคุมการเปิดปิดไฟดวงเดียวกัน อาจจะมีสวิตช์อยู่ตามที่ต่าง ๆ เช่น ชั้นบนกับชั้นล่าง สวิตช์แต่ละตัวก็สามารถจะเปิดปิดไฟได้อย่างอิสระ จงออกแบบวงจรซึ่งมีสวิตช์ 2 ตัวควบคุมไฟดังกล่าว

วิธีทำ มีสวิตช์ 2 ตัวคือ x,y

ให้ F(x,y) = 1 ไฟติด (ติด = 1 และดับ = 0)

ถ้าเลือก F(1,1) = 1 (x และ y = ไฟติด)

$\therefore$ ถ้าปิด x ไฟต้องดับ นั่นคือ F(0,1) = 0

หรือปิด y ไฟต้องดับ นั่นคือ F(1,0) = 0

ขณะที่ไฟดับ การเปิดปิด x y จะต้องได้ไฟติด จะได้ 2 สถานะ

คือ F(1,1) หรือ F(0,0)=1 แสดงดังตารางที่ 2.9

∴ จะได้ตารางค่า F (ตารางที่ 2.9) ที่ต้องการคือ F(x,y) จะมีพจน์สั้น 2 พจน์บวกกัน

∴ $F(x,y) = xy+\bar{x}\bar{y}$ ▮

ตารางที่ 2.9 แสดงค่าความจริงของ $xy+\bar{x}\bar{y}$

x	y	F(x,y)
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

ถ้าขยายการควบคุมไฟเป็น 3 จุดโดยสวิตซ์ x,y,z ต้องหา F(x,y,z)

ถ้าให้ F(1,1,1) = 1 (ไฟติด) ขณะไฟติด การปิดตัวใดตัวหนึ่งไฟต้องดับ

∴ F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,0) = 0

ขณะไฟดับ การเปลี่ยนสถานะของสวิตซ์ตัวใดตัวหนึ่งไฟต้องติด

∴ F(0,0,1) = F(1,0,0) = F(0,1,0) = 1 ดังตารางที่ 2.10

ถ้าเปลี่ยนสถานะของ Z เป็น 0 ไฟต้องดับ

∴ F(0,0,0) = 0

ได้ตารางค่าของ F คือ $F(x,y,z) = xyz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}z$ ▮

ตารางที่ 2.10 แสดงค่าความจริงของ $xyz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}z$

x	y	z	F(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

2.8.3 **วงจรบวก**

ในระบบคอมพิวเตอร์ทั่วไปจะแทนเลขจำนวนเต็มด้วยเลขฐานสอง ดังนั้นวงจรบวกเลขฐานสองจึงมีใช้ในหน่วยประมวลผล หากพิจารณาจากการสร้างวงจรใช้ในการบวก x กับ y เมื่อกำหนดให้

$$x,y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{ผลลัพธ์} = C \text{ และ } S$$

เมื่อ S = บิตผลรวม

C = บิตตัวทด

วงจรบวกแบ่งการออกแบบวงจรเป็น 2 รูปแบบคือวงจรตัวบวกครึ่ง (half adder) และวงจรตัวบวกเต็ม (full adder)

2.8.3.1 ตัวบวกครึ่งเป็นการเริ่มต้นการออกแบบวงจรด้วยการบวก 2 บิต โดยไม่คำนึงถึงตัวทดจากการบวกก่อนหน้านี้ จากตารางที่ 2.11 จะได้ C = xy และ S = $x\bar{y}+\bar{x}y$ หรือ S = $(x+y)(\overline{xy})$

ตารางที่ 2.11 ตารางความสัมพันธ์ของข้อมูลเข้าและออกจากวงจรตัวบวกครึ่ง

Input		output	
x	y	S	C
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

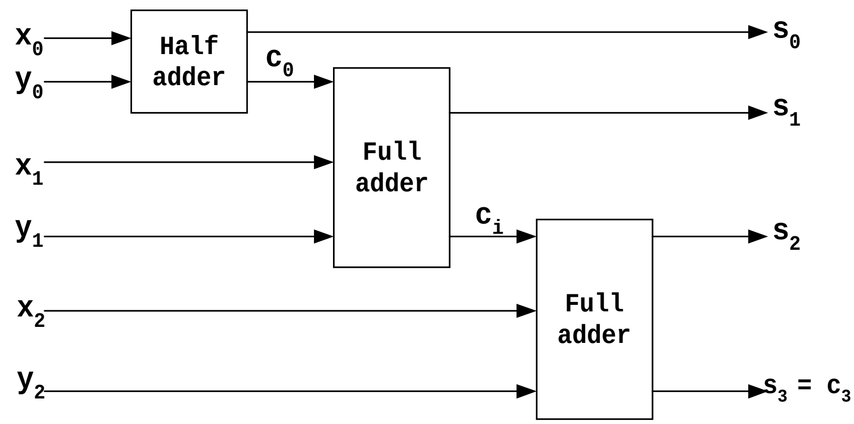
2.8.3.2 ตัวบวกเต็มจะต้องคำนึงถึงตัวทดด้วยค่ารับเข้า สำหรับตัวบวกเต็มประกอบด้วย x,y และตัวทด C_I ส่วนผลลัพธ์จะได้จากการบวกบิต S และตัวทด C_{i+1} โดย S = $xyC_i + x\bar{y}\bar{C}_i + \bar{x}y\bar{C}_i + \bar{x}\bar{y}C_i$ และ C_{i+1} = $xyC_i + xy\bar{C}_i + x\bar{y}C_i + \bar{x}yC_i$ มีค่าดังตารางที่ 2.12

ตารางที่ 2.12 ตารางความสัมพันธ์ของข้อมูลเข้าและออกจากวงจรตัวบวกเต็ม

x	y	C_i	S	C_{i-1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

จากฟังก์ชันบูลีนข้างต้น สามารถเขียนรูปวงจรได้ โดยพิจารณาการสร้างตัวบวกเต็ม และตัวบวกครั้ง จาก โดยใช้ตัวบวกครึ่งเพื่อบวก 3 บิต ดังรูปที่ 2.5

$(x_2x_1x_0)_2+(y_2y_1y_0)_2 \longrightarrow (S_3S_2S_1S_0)_2$



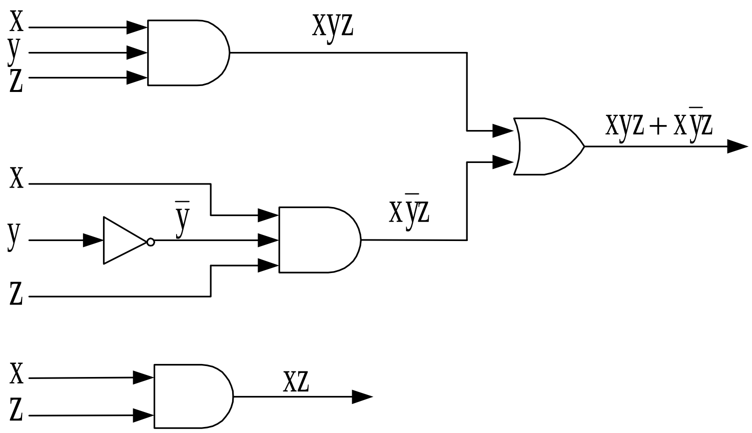
รูปที่ 2.5 รูปวงจรตัวบวกเต็มและตัวบวกครึ่งจากการบวก 3 บิต

2.8.4 การลดรูปวงจร

ประสิทธิภาพของวงจร ขึ้นอยู่กับจำนวนเกตและการจัดรูปวงจร โดยวงจรที่มีจำนวนเกตดำเนินการน้อยจะเสียค่าใช้จ่ายน้อย และมักจะใช้เนื้อที่น้อยตามไปด้วย ดังนั้นจึงต้องคำนึงถึงการลดรูปวงจร โดยพิจารณาจากนิพจน์บูลีนของฟังก์ชันบูลีนที่ใช้ในการออกแบบวงจร หากรวมนิพจน์บางนิพจน์ผลบวกของผลคูณได้ จะทำให้มีประโยชน์ในการลดรูปของวงจรได้เช่นกัน พิจารณาได้จากตัวอย่างนิพจน์บูลีนต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
xyz + x\bar{y}z &= y + \bar{y}\,(xz) \\
&= 1 \cdot (xz) \\
&= xz
\end{aligned}
$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $xyz + x\bar{y}z$ และ xz ให้ผลลัพธ์เหมือนกัน สามารถแสดงแบบวงจร ได้ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 วงจร 2 แบบแต่ให้ผลเหมือนกัน

2.8.4.1 แผนภาพคาร์นอจ์ (Karnaugh map) เป็นวิธีการพื้นฐานที่นิยมใช้ทั่วไปในการลดรูปนิพจน์บูลีน โดยใช้หลักการทางกราฟิก ประกอบด้วยการใช้ตาราง 2 มิติ โดยแต่ละสดมภ์ระบุชื่อนิพจน์สั้น แต่ละแถวระบุตัวแปรบูลีน ซึ่งถ้าพจน์สั้นที่เกิดจากผลคูณของตัวแปรในแถวและสดมภ์ ปรากฏในนิพจน์บูลีนก็จะใส่ 1 ไว้ในตำแหน่งที่สอดคล้องกัน ดังตัวอย่างที่ 2.15 แผนภาพคาร์นอจ์สำหรับ 2 ตัวแปร

ตัวอย่างที่ 2.15 การลดรูปนิพจน์บูลีนดังรูปที่ 2.7

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

$xy + \bar{x}y$

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

$x\bar{y} + \bar{x}y$

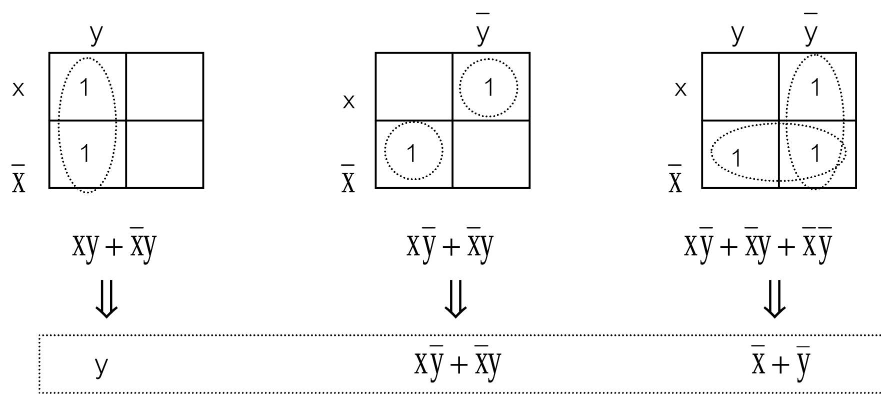
	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

$x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

รูปที่ 2.7 การจัดกลุ่มการลดรูปที่ต่อกัน

การลดรูปนิพจน์บูลีนโดยใช้แผนภาพคาร์นอจ์ ทำได้โดยจัดกลุ่มการลดรูปที่ต่อกัน (ต่างกันเพียง 1 สัญพจน์) ดังตัวอย่างที่ 2.16 และตัวอย่างที่ 2.17

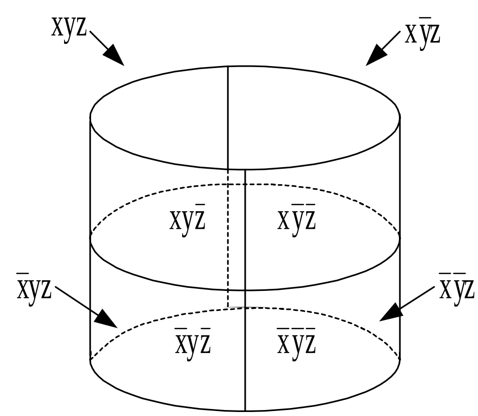
ตัวอย่างที่ 2.16 ใช้แผนภาพคาร์นอจ์ลดรูปวงจรจากรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 การลดรูปนิพจน์บูลีนโดยใช้แผนภาพคาร์นอจ์

ตัวอย่างที่ 2.17 แผนภาพคาร์นอจ์ สำหรับ 3 ตัวแปรดังรูปที่ 2.9

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	xyz	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$



รูปที่ 2.9 แผนภาพคาร์นอจ์สำหรับ 3 ตัวแปร

สี่เหลี่ยม จะอยู่ติดกัน ถ้า

สี่เหลี่ยมที่ติดกัน 2 อัน	สามารถรวมเป็น	ผลคูณของสัญพจน์ 2 ตัว
ติดกัน 4 อัน (2x2, 4x1)	สามารถรวมเป็น	สัญพจน์เดียว
ติดกัน 8 อัน	สามารถรวมเป็น	ไม่มีสัญพจน์ และฟังก์ชัน

การใช้แผนภาพคาร์นอจ์เพื่อรวมกลุ่มของพจน์ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ เพื่อให้มีปริมาณพจน์น้อยลง

ตัวอย่างที่ 2.18 จงใช้ แผนภาพคาร์นอจ์ลดรูปนิพจน์บูลีนต่อไปนี้

วิธีทำ

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

∴ ทำให้อยู่รูปแบบง่ายได้เป็น $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$

b) $x\overline{yz} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

∴ ทำให้อยู่รูปแบบง่ายได้เป็น $\bar{y} + \bar{x}z$

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

∴ ทำให้อยู่รูปแบบง่ายได้เป็น $x + \bar{y} + z$

2.8.1.2 หลักการของควินแมคคลัสคี (the Quine–McCluskey method) เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการลดรูปนิพจน์ของฟังก์ชันบูลีน ถูกคิดค้นในปี ค.ศ. 1950 โดย วิวลาร์ด แวน ควิน (Willard Van Quine) และ เอ็ดเวิร์ด เจ แมคคลัสคี (Edward J. McCluskey) (Rosen, 1995, p.638) หลักการของควินแมคคลัสคีประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งคือการหาพจน์ที่เป็นตัวเลือกเพื่อรวมผลผลิตของบูลีนย่อย ๆ และส่วนที่สองคือการตัดสินใจว่าผลผลิตบูลีนใดถูกใช้แน่นอน ตัวอย่างของการทำงานแสดงดังตัวอย่างที่ 2.19

ตัวอย่างที่ 2.19 หลักการของควินและแมคคลัสคี ในการลดรูป $xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

วิธีทำ

1. ขั้นแรกแทนด้วยสายของบิต เช่น กำหนดให้เป็น 1 เมื่อ x มีผลบวก และกำหนดเป็น 0 เมื่อ x มีผลต่าง เป็นต้น จากนั้นจัดกลุ่มตามจำนวนของบิต 1 โดยพจน์ที่จะสามารถรวมกันได้จะมีจำนวนบิต 1 ต่างกันอยู่ 1 เสมอ ดังตารางที่ 2.13

ตารางที่ 2.13 การแทนพจน์สั้นด้วยสายของบิต

พจน์สั้น	สายของบิต	จำนวนนับบิต 1
xyz	111	3
$x\bar{y}z$	101	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0

2. ขั้นที่ 2 ให้จัดกลุ่มทีละ 2 พจน์สำหรับพจน์ที่ได้รับการจัดกลุ่มใด ๆ เป็นการลดรูปนิพจน์

3. ขั้นที่ 3 พิจารณาพจน์สั้นของผลคูณทุกตัวแปรที่เกิดจากการจัดกลุ่มในข้อ 2 โดยสร้างตารางซึ่งแถวจะบรรจุพจน์ และแต่ละสดมภ์กำหนดด้วยนิพจน์ที่ถูกจัดกลุ่มในแต่ละลำดับและพจน์ที่เหลืออยู่ที่ยังไม่ใช้รวมนิพจน์ในขั้นตอนก่อนหน้านี้ ดังตารางที่ 2.14

ตารางที่ 2.14 การลดรูปนิพจน์ด้วยหลักการของควินและแมคคลัสคี

ขั้นที่ 1		ขั้นที่ 2		ขั้นที่ 3	
พจน์	สายของบิต	พจน์	สายของบิต	พจน์	สายของบิต
1 xyz	111	(1,2) xz	1 - 1	(1,2,3,4) z	- -1
2 $x\bar{y}z$	101	(1,3) yz	- 1 1		
3 $\bar{x}yz$	011	(2,4) $\bar{y}z$	- 0 1		
4 $\bar{x}\bar{y}z$	001	(3,4) $\bar{x}z$	0 - 1		
5 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	(4,5) $\bar{x}\bar{y}$	0 0 -	(4,5) $\bar{x}\bar{y}$	00 -

หมายเหตุ '-' หมายถึง ค่าที่หายไป

นิพจน์ของพจน์สั้นจะเป็นผลบวกของผลคูณในนิพจน์เดิมที่ไม่มีการลดรูปนิพจน์

$\therefore$ ได้นิพจน์ของพจน์สั้น $= z + \bar{x}\bar{y}$

2.9 สรุป

เนื่องจากระบบดิจิทัลทำงานเป็นไปตามกฎทางตรรกศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับหลักการทางคณิตศาสตร์ที่ว่าด้วยตัวแปรที่มี 2 ค่าคือ 1 และ 0 ที่เรียกว่าพีชคณิตบูลีน สามารถนำเอาเซตของนิพจน์บูลีนมาจัดเพื่อแทนวงจรทางอิเล็กทรอนิกส์ และหากวงจรมีขนาดใหญ่และสลับซับซ้อนก็สามารถลดรูปวงจรที่ทำงานสมบูรณ์แบบลงมาเป็นวงจรขนาดเล็กลงแต่ยังทำงานให้ผลลัพธ์เหมือนกันได้โดยอาศัยแผนภาพคาร์นอฟ หรือหลักการของควินและแมคคลัสคี

2.10 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์กฎการดูดซับ $x+xy = x$ โดยใช้สมมติฐานของบูลีน

2. จงหาจำนวนของฟังก์ชันบูลีนที่แตกต่างกันของ $F(x,y,z)$ ซึ่ง $F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = F(x,y,z)$ สำหรับทุกค่าของตัวแปรบูลีน x,y, และ z

3. หาค่าผลรวมของส่วนขยายของฟังก์ชันบูลีนต่อไปนี้

    3.1 $F(x,y,z) = x + y + z$

    3.2 $F(x,y,z) = (x + z)y$

    3.3 $F(x,y,z) = x$

    3.4 $F(x,y,z) = x\bar{y}$

4. หาผลรวมของบูลีนที่มี x หรือ $\bar{x}$, y หรือ $\bar{y}$ และ z หรือ $\bar{z}$ ที่มีค่า 0 ถ้ากำหนดค่าดังนี้

    4.1 $x = y = 1, z = 0$

    4.2 $x = y = z = 0$

    4.3 $x = z = 0, y = 1$

5. จงสร้างวงจรจาก ตัวกลับค่า, แอนด์เกต และ ออร์เกต ที่จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

    5.1 $\bar{x} + y$

    5.2 $\overline{(x + y)}x$

    5.3 $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

    5.4 $\overline{(\bar{x} + Z)(y + \bar{z})}$

6. จงเขียนแผนภาพคาร์นอจ์ของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร โดยใส่ 1 ในตารางสี่เหลี่ยมที่แทน $\bar{x}y\bar{z}$

7. สมมติให้สมาคมมีสมาชิก 5 คน แต่สมชายและสมศักดิ์มักโหวตตรงข้ามกับสมศรี จงออกแบบวงจรที่ใช้ในการโหวตของสมาคมใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการโหวต

เอกสารอ้างอิง

ประทีป บัญญัตินพรัตน์. (2532). **ทฤษฎีและการใช้งานวงจรดิจิตอล เล่ม 1 (ฉบับปรับปรุงใหม่)**. กรุงเทพฯ: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า วิทยาเขตเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Johnsonbaugh, Richard, Date. (1984). **Discrete mathematics.** NY: Macmillan Publishing.

Rosen Kenneth H. (1995). **Discrete mathematics and its application** (3rd ed). Singapore: McGraw-Hill.