แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1.1 ความนำ

1.2 ตรรกศาสตร์

- 1.2.1 ประพจน์
- 1.2.2 ประโยคเปิด
- 1.2.3 วลีบอกปริมาณ
- 1.2.4 นิเสธของวลีบอกปริมาณ

1.3 เซต

- 1.3.1 ผลคูณคาทีเซียน
- 1.3.2 ตัวดำเนินการบนเซต
- 1.3.3 คุณสมบัติของเซต
- 1.3.4 ยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน
- 1.3.5 การแทนเซตในคอมพิวเตอร์
- 1.3.6 ฟัซซีเซต

1.4 ฟังก์ชัน

- 1.4.1 ฟังก์ชันผกผัน และฟังก์ชันประกอบ
- 1.4.2 กราฟของฟังก์ชัน
- 1.4.3 ฟังก์ชันปัดเศษลง และฟังก์ชันปัดเศษขึ้น

1.5 อันดับและการหาผลรวม

- 1.5.1 อันดับ
- 1.5.2 การหาผลรวม

1.6 สัญลักษณ์โอใหญ่

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้ศึกษาทราบถึงพื้นฐานของการใช้เหตุผลทางด้านคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถใช้ตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ได้
3. เพื่อให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจเรื่องเซตและตัวดำเนินการบนเซต
4. เพื่อให้ผู้ศึกษาประยุกต์ใช้เซตและตรรกศาสตร์ในการวิเคราะห์ปัญหาเพื่อหาคำตอบได้
5. เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของฟังก์ชันและการดำเนินการในฟังก์ชัน

วิธีสอนและกิจกรรม

1. แบบบรรยายและสาธิตศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งทรัพยากรอื่น อาทิ อินเตอร์เน็ต
3. ตอบคำถามท้ายบทและโต้ตอบระหว่างเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ โปรแกรมนำเสนอเนื้อหาวิชา
4. เว็บเพจอ้างอิงความรู้ ได้แก่ http://noppanun.lpru.ac.th

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน
2. สังเกตการซักถามคำถามและการตอบคำถาม
3. สังเกตการฝึกปฏิบัติจากแบบฝึกหัดท้ายบท

บทที่ 1
ตรรกศาสตร์ เซต และฟังก์ชัน

1.1 ความนำ

ในบทนี้จะครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญอยู่ 3 ส่วนคือ ตรรกศาสตร์ เซต และฟังก์ชัน ในส่วนของตรรกศาสตร์ จะเป็นพื้นฐานของการใช้เหตุผลทางด้านคณิตศาสตร์ โดยเน้นในเรื่องวลีบอกปริมาณ หากจะกล่าวถึงความสำคัญของตรรกศาสตร์ในทางวิทยาการคอมพิวเตอร์สามารถนำมาประยุกต์ใช้ทางด้านการออกแบบวงจรหรือชุดคำสั่งของเครื่องคอมพิวเตอร์ เนื่องจากในหน่วยประมวลผลของคอมพิวเตอร์จะมีหน่วยที่ใช้ในการเปรียบเทียบเชิงตรรก (logic unit) บรรจุอยู่ ดังนั้นผู้ที่มีความเข้าใจถ่องแท้จึงสามารถเขียนโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์ได้ดี ในส่วนของเซตจะเป็นที่มาของหลักการรวมเข้าแยกออก ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์เพื่อจะนำมาใช้ในการเขียนโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์ได้ง่าย ถูกต้อง และมีประสิทธิภาพ ส่วนสุดท้ายของบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชัน เน้นหนักทางด้านความสัมพันธ์ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น

1.2 ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ (logic) เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยเหตุผล สามารถนำมาใช้ในชีวิตประจำวันในเรื่องของการตรวจสอบความสมเหตุสมผล ทั้งในด้านการกระทำ คำพูดหรือการอ่าน ชนิดของข้อความ (statement) ที่ใช้ในตรรกศาสตร์ มี 3 ประเภทดังต่อไปนี้

1.2.1 ประพจน์

ประพจน์ (proposition) คือประโยคบอกเล่ามีค่าความจริง (truth value) ที่แน่นอน (เป็นจริงหรือเท็จเท่านั้น) ดังนั้นประโยคคำถาม หรือประโยคอุทานจึงไม่เป็นประพจน์ หากค่าความจริงในตารางค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมดเรียกว่าทอโทโลยี (tautology) ส่วนค่าความจริงในตารางค่าความจริงเป็นเท็จทั้งหมดเรียกว่าคอนทราดิกชัน (contradiction)

ตัวอย่างที่ 1.1 ประโยคบอกเล่าทั้งหมดนี้ข้อใดเป็นประพจน์

(ก) เมืองหลวงของประเทศไทยคือกรุงเทพฯ

(ข) $1+1 = 2$

(ค) รุ้งกินน้ำมี 7 สี

(ง) $2+2 = 3$

(จ) ศรรามไปกินข้าวกับเรามั้ย

(ฉ) $X+1 = 2$

วิธีทำ ข้อ (ก) ถึง (ค) เป็นประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อ (ง) เป็นประพจน์มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ส่วนในข้อ (จ) และ (ฉ) ไม่เป็นประพจน์ ∎

สัญลักษณ์ นิยมใช้ p, q, r แทนประพจน์

นิยามที่ 1.1 ให้ p เป็นประพจน์ มันจะมีกรณีที่ไม่เป็น p เรียกว่านิเสธ (negation) ของ p เขียนแทนด้วย $\neg p$ อ่านว่า น็อตพี (not p) มีค่าความจริงดังตารางที่ 1.1

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหานิเสธของ “วันนี้เป็นวันศุกร์”

วิธีทำ คำตอบคือ “มันไม่จริงที่วันนี้เป็นวันศุกร์”

หรือแทนง่าย ๆ ว่า “วันนี้ไม่ใช่วันศุกร์” ∎

ตารางที่ 1.1 ตารางค่าความจริงสำหรับนิเสธของประพจน์

p	$\neg$ p
T	F
F	T

นิยามที่ 1.2 ให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ p,q ที่เชื่อมกันด้วย “และ” แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ เรียกว่า คอนจังชัน (conjunction) ของ p และ q ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่เท่านั้น นอกนั้นจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังตารางที่ 1.2

ตารางที่ 1.2 แสดงค่าความจริงของ $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	กรุงเทพอยู่ภาคกลาง และ 1+1 > 1
T	F	F	กรุงเทพอยู่ภาคกลาง และ 1+1 < 1
F	T	F	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ และ 1+1 > 1
F	F	F	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ และ 1+1 < 1

นิยามที่ 1.3 ให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ p,q ที่เชื่อมกันด้วย “หรือ” แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ เรียกว่า ดิสจังชัน (disjunction) ของ p หรือ q ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q เป็นเท็จทั้งคู่เท่านั้น นอกนั้นจะมีค่าความจริงเป็นจริง ดังตารางที่ 1.3

ตารางที่ 1.3 แสดงค่าความจริงของ $p \vee q$

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	กรุงเทพอยู่ภาคกลาง หรือ 1+1 > 1
T	F	T	กรุงเทพอยู่ภาคกลางหรือ 1+1 < 1
F	T	T	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ หรือ 1+1 > 1
F	F	F	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ หรือ 1+1 < 1

นิยามที่ 1.4 ให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ p,q ที่เชื่อมกันด้วย "เอ็กซ์คลูซีฟออร์" แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \oplus q$ เรียกว่า เอ็กซ์คลูซีฟออร์ (exclusive or) ของ p XOR q ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน และเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน ดังตารางที่ 1.4

ตารางที่ 1.4 แสดงค่าความจริงของ $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

นิยามที่ 1.5 ให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ p,q ที่เชื่อมกันด้วย "ถ้า..แล้ว" แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ เรียกว่า อิมพลิเคชัน (implication) ของ ถ้า p แล้ว q ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริงและ q เป็นเท็จเท่านั้น นอกนั้นจะมีค่าความจริงเป็นจริง ดังตารางที่ 1.5

ตารางที่ 1.5 แสดงค่าความจริงของ $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	ถ้ากรุงเทพอยู่ภาคกลาง แล้ว 1+1 > 1
T	F	F	ถ้ากรุงเทพอยู่ภาคกลาง แล้ว 1+1 < 1
F	T	T	ถ้ากรุงเทพอยู่ภาคเหนือ แล้ว 1+1 > 1
F	F	T	ถ้ากรุงเทพอยู่ภาคเหนือ แล้ว 1+1 < 1

นิยามที่ 1.6 ให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ p,q ที่เชื่อมกันด้วย "ก็ต่อเมื่อ" แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$ เรียกว่า ไบคอนดิชันเนล (biconditional) ของ p ก็ต่อเมื่อ q ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน และเป็นเท็จเมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน ดังตารางที่ 1.6

ตารางที่ 1.6 แสดงค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$	
T	T	T	กรุงเทพอยู่ภาคกลาง ก็ต่อเมื่อ 1+1 > 1
T	F	F	กรุงเทพอยู่ภาคกลาง ก็ต่อเมื่อ 1+1 < 1
F	T	F	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ ก็ต่อเมื่อ 1+1 > 1
F	F	T	กรุงเทพอยู่ภาคเหนือ ก็ต่อเมื่อ 1+1 < 1

สามารถสรุปประพจน์และตัวเชื่อม (connective) เพื่อหาค่าความจริงได้ ดังตารางที่ 1.7

ตารางที่ 1.7 แสดงค่าความเป็นจริงทางตรรกศาสตร์

ประพจน์		ตัวเชื่อมและ	ตัวเชื่อมหรือ	ตัวเชื่อมถ้า..แล้ว	ตัวเชื่อมก็ต่อเมื่อ	นิเสธ
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\neg P$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

1.2.2 ประโยคเปิด

ประโยคเปิดคือประโยคที่มีตัวแปรและเมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ (universe) แทนด้วยสัญลักษณ์ U ประโยคเปิดใดก็ตามจะต้องมีค่าความจริงที่แน่นอน

สัญลักษณ์ นิยมใช้ P(x), P(x,y), Q(x,y,z) แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปรในวงเล็บ และเมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกตัวหนึ่ง ๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ จะใช้สัญลักษณ์ P(x) สำหรับ 1 ตัวแปร Q(x,y,z) สำหรับ 3 ตัวแปร

ตัวอย่างที่ 1.3 ให้ $P(x)$ แทน $x < 5$ สำหรับ $U = \{-1, 5, 6\}$

วิธีทำ จะได้ $P(-1)$ แทน $-1 < 5$ ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง

$P(6)$ แทน $6 < 5$ ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ ∎

ตัวอย่างที่ 1.4 ให้ Q(เขา) แทน “เขาเป็นผู้หญิง” สำหรับ $U = \{\, x | x$ เป็นคน $\}$

วิธีทำ Q(จินตรา) แทน “จินตรา เป็นผู้หญิง” ซึ่งเป็นจริง

Q(สันติสุข) แทน “สันติสุข เป็นผู้หญิง” ซึ่งเป็นเท็จ ∎

1.2.3 วลีบอกปริมาณ

วลีบอกปริมาณ (quantification) คือสิ่งที่บอกขีดจำกัดของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ของตัวแปร เมื่อเติมประโยคเปิดด้วยวลีบอกปริมาณ จะเป็นประพจน์ทันที ประโยคเปิดมี 2 ชนิดคือ

(1) สำหรับทุกค่าที่ $x \in U$ …(for all) ใช้สัญลักษณ์ $\forall x[P(x)]$

(2) มีบางค่าที่ $x \in U$ …(for some) ใช้สัญลักษณ์ $\exists x[P(x)]$

ตัวอย่างที่ 1.5 ให้ $P(x,y)$ แทน $x + y = y + x$ จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y\ P(x,y)$

วิธีทำ $\because\ x + y = y + x$ สำหรับทุก $x,y \in R$

$\therefore P(x,y) = T$ สำหรับทุก $x,y \in R$

$\because\ \forall x \forall y\ P(x,y) = T$ ∎

ตัวอย่างที่ 1.6 ให้ $Q(x,y)$ แทน $x + y = 0$ จงหาค่าความจริงของ $\exists y \forall x\ Q(x,y)$ และ $\forall x \exists y\ Q(x,y)$

วิธีทำ $\exists y \forall x\ Q(x,y)$ มี y บางตัวที่ทำให้ $Q(x,y) = T$ ทุกค่าของ x ซึ่งไม่จริง $\therefore \exists y \forall x\ Q(x,y) = F$

$\forall x \exists y\ Q(x,y)$ ทุกค่าของ x จะมี y ซึ่งทำให้ $Q(x,y) = T$

$\therefore \forall x \exists y\ Q(x,y) = T$ โดยการเลือก $y = -x$ ∎

หมายเหตุ ลำดับก่อนหลังของวลีบอกปริมาณมีความสำคัญสำคัญตัวอย่างเช่น

$\exists x \forall y\ P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y \exists x\ P(x,y)$

เว้นแต่ว่า จะเป็น $\forall$ หรือ $\exists$ ทั้งคู่คือ

$\exists x \exists y \Leftrightarrow \exists y \exists x$ หรือ $\forall x \forall y \Leftrightarrow \forall y \forall x$

กฎเกณฑ์ที่ใช้บ่อย ๆ สรุปได้ดังตารางที่ 1.8

ตารางที่ 1.8 แสดงค่าความจริงของวลีบอกปริมาณสำหรับ 2 ตัวแปร

ประพจน์	เป็นจริงเมื่อ	เป็นเท็จเมื่อ
$\forall x \forall y\ P(x,y)$ $\forall y \forall x\ P(x,y)$	P(x,y) = T ทุก ๆ x,y	มีอย่างน้อย 1 คู่ (x,y) ที่ทำให้ P(x,y) = F
$\forall x \exists y\ P(x,y)$	ทุกค่าของ x จะมี y ที่ P(x,y) = T	มี x ที่ทำให้ P(x,y) = F ทุกๆ ค่าของ y
$\exists x \forall y\ P(x,y)$	มี x ที่ทำให้ P(x,y) = T ทุกๆ ค่าของ y	ทุกค่าของ x จะมี y ซึ่งทำให้ P(x,y) = F
$\exists x \exists y\ P(x,y)$ $\exists y \exists x\ P(x,y)$	มี (x,y) อย่างน้อย 1 คู่ที่ทำให้ P(x,y) = T	P(x,y) = F ทุก ๆ (x,y)

ที่มา(Rosen, 1995, p.31)

ตัวอย่างที่ 1.7 ให้ Q(x,y,z) แทน $x + y = z$ จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y \exists z\ Q(x,y,z)$

วิธีทำ ทุกค่าของ x,y จะมี z ซึ่งทำให้ $x + y = z$ จริง

$\therefore$ ค่าความจริง = T

แต่ $\exists z \forall x \forall y\ Q(z,y,z) = F$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.8 ประพจน์มีผู้หญิงซึ่งเคยขึ้นเครื่องบิน 1 เที่ยวของทุกสายการบิน จงหาประโยคเปิดที่แทนประพจน์นี้ กำหนดให้ P(w,f) แทนผู้หญิง w ขึ้นสายการบิน f และ Q(f,a) แทนเที่ยวบิน f เป็นของสายการบิน a

วิธีทำ จะได้ประโยคเปิด $\exists w \forall a \exists f\ (P(w,f) \wedge q(f,a))$

หรือ $\exists w \forall a \exists f\ R(w,f,a)$ เมื่อ $R(w,f,a) = w$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.9 จงพิสูจน์นิยามของลิมิตโดยใช้วลีบอกปริมาณ

วิธีทำ $\lim_{x \to a} f(x)$ ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$

ซึ่งทำให้ $| f(x) - L | < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - a| < \delta$

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x\ (|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$ ▮

1.2.4 **นิเสธของวลีบอกปริมาณ**

ในบางกรณีประโยคสามารถหาส่วนกลับได้ด้วยการนิเสธของนิพจน์ ดังประโยคที่ว่า "นักเรียนทุกคนในชั้นเรียนลงเรียนวิชาดิสครีต" ซึ่งประโยคดังกล่าวสามารถสร้างประพจน์ได้ดังนี้

$$\forall x P(x)$$

โดยที่ P(x) แทนประโยค "x มีการลงเรียนวิชาดิสครีต" ซึ่งหากมีส่วนกลับของประโยคนี้คือ "ไม่ใช่ทุกกรณีที่นักเรียนทุกคนในชั้นลงเรียนวิชาดิสครีต" ซึ่งเท่ากับว่า "นักเรียนในชั้นเรียนบางคนอาจไม่ลงเรียนวิชาดิสครีต" ซึ่งสร้างประพจน์ด้วยนิเสธของวลีบอกปริมาณ (negation quantifiers) ได้ดังนี้

$$\exists x\ \neg P(x)$$

โดยประพจน์ข้างต้นอาจประพจน์ที่มีความสมมูล (equivalence) กันได้ดังนี้

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$$

สามารถสรุปนิเสธของวลีบอกปริมาณได้ดังตารางที่ 1.9

ตารางที่ 1.9 ตัวอย่างของนิเสธวลีบอกปริมาณ

ประพจน์	นิเสธ	ประพจน์เทียบเท่า
$\exists x\ P(x)$	$\neg \exists x\ P(x)$	$\forall x \neg P(x)$
$\forall x\ P(x)$	$\neg \forall x\ P(x)$	$\exists x \neg P(x)$

ที่มา(Rosen, 1995, p.33)

ตัวอย่างที่ 1.10 จากนิพจน์ " P เป็นคนรวย", "Q เป็นคนโง่ ", " R เป็นคนโอ้อวด" จงเขียนวลีบอกปริมาณและสัญลักษณ์แทนประโยคต่อไปนี้

วิธีทำ (1) ไม่มีคนรวยเป็นคนโง่ จะได้ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

(2) คนโง่ทุกคนเป็นคนโอ้อวด จะได้ $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

(3) ไม่มีคนรวยเป็นคนโอ้อวด จะได้ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ ▌

1.3 เซต

เซต (set) เป็นภาษาคณิตศาสตร์ที่ใช้เรียกสิ่งต่างที่รวมอยู่กันเป็นกลุ่ม โดยสิ่งที่อยู่ในเซตจะเรียกว่า สมาชิก (element) ของเซต ซึ่งสมาชิกต้องระบุการเป็นสมาชิกของเซตนั้น ๆ อย่างชัดเจนได้ อาทิ เซตของหนุ่มที่หล่อที่สุดในโลก ไม่ถือว่าเป็นเซต เพราะไม่สามารถระบุสมาชิกที่ชัดเจนได้ และเซตของเลขจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับสมการ $X^2-X-2 = 0$ ถือว่าเป็นเซต มีสมาชิกภายในเซต คือ –1 กับ 2 เป็นต้น

สัญลักษณ์ นิยมใช้อักษรตัวใหญ่ A,B,C,…แทนชื่อของเซต และนิยมใช้อักษรตัวเล็ก a,b,c,… แทนสมาชิกภายในเซตโดยสมาชิกของเซตจะอยู่ภายใต้เครื่องหมายวงเล็บปีกกา { } และคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละสิ่งด้วย , (คอมมา)

ตัวอย่างที่ 1.11 เซต A มีสมาชิกคือ a,b และ c

วิธีทำ A = {a,b,c}

เซต V ซึ่งประกอบด้วยสระของภาษาอังกฤษ

วิธีทำ V = { a,e,I,o,u}

เซต O เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10

วิธีทำ O = {1,3,5,7,9}

เซต A ที่อาจจะมีสมาชิกที่มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกันอาทิ

วิธีทำ A = {a,b,0,2,John}

เซต A ที่ค่าของเลขจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 100

วิธีทำ A = {1,2,3, … ,99} ▮

นิยามที่ 1.7 เซต A จะเท่ากับ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ A = {3,5,1} และ B = {1,3,3,3,5} จงพิสูจน์ว่า A = B

วิธีทำ จัดเรียงเซต A = {3,5,1} = {1,3,5}

ตัดตัวซ้ำเซต B = {1,3,3,3,5} = {1,3,5}

$\therefore$ A = B ▮

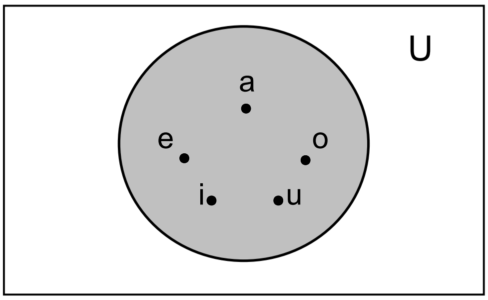
ข้อสังเกต เซตอาจจะแทนโดยใช้วิธีบอกคุณสมบัติของสมาชิกแทนการแจงสมาชิก เช่น

O = {x|x เป็นสมาชิกของเลขจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10}

R = {x|x เป็นสมาชิกของเลขจำนวนจริง}

หรือ เซตอาจจะแทนด้วยแผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ (Venn-Euler diagram) ดังรูปที่ 1.1 โดยกำหนดให้

เอกภพสัมพัทธ์	แทนด้วย สี่เหลี่ยม
เซต	แทนด้วย วงกลม
สมาชิกของเซต	แทนด้วย จุดภายในวงกลม



รูปที่ 1.1 เขียนแผนภาพของเวนน์แทนเซตของสระในภาษาอังกฤษ

ที่มา(Rosen, 1995, p.41)

สัญลักษณ์ เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของเซต

a เป็นสมาชิกของ A	แทนด้วย $a \in A$
a ไม่เป็นสมาชิกของ A	แทนด้วย $a \notin A$
เซตว่าง (empty set, null set)	แทนด้วย $\varnothing, \{\ \}$

นิยามที่ 1.8 A เป็นสับเซต (subset) ของ B (แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subseteq B$) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B

$A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ เป็นจริง

$\varnothing \subseteq S$ ทุก ๆ เซต $\because$ $x \in \varnothing \rightarrow x \in S$ เป็นจริงเสมอ

นิยามที่ 1.9 A จะเป็นสับเซตแท้ (proper subset) ของ B (แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$

นิยามที่ 1.10 เซตสองเซตใด ๆ อาทิเซต A และ B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

นิยามที่ 1.11 S เป็นเซตจำกัด (finite set) ถ้าสมาชิกของ S มีค่าต่าง ๆ กัน n ค่าและ n จะเรียกว่าคาร์ดินัลลิตี (cardinality) ของ S เขียนแทนด้วย $|S|$

ตัวอย่างที่ 1.13 A = {จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10} $\rightarrow$ |A| = 5

S = {ตัวอักษรภาษาอังกฤษ} $\longrightarrow$ $|S| = 26$

$|\varnothing| = 0$ ▮

นิยามที่ 1.12 S เป็นเซตอนันต์ (infinite set) ถ้า S ไม่เป็นเซตจำกัด

ตัวอย่างที่ 1.14 เซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์ เนื่องจากไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกในเซตได้

A = {เซตของเลขจำนวนเต็ม}

B = {เซตของเลขจำนวนเฉพาะ} ▮

นิยามที่ 1.13 เพาเวอร์เซต (power set) ของ S จะเป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ซึ่งเป็นสับเซตของ S ทั้งหมด เขียนแทนด้วย P(S)

$$P(S) = \{x \mid x \subseteq S\}$$

ตัวอย่างที่ 1.15 กำหนดให้เซต S มีสมาชิกคือ {a,b} จงหาเพาเวอร์เซตของ S

วิธีทำ $P(S) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้เซต S มีสมาชิกคือ {0,1,2} จงหาเพาเวอร์เซตของ S

วิธีทำ $P(S) = \{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.17 จงหาเพาเวอร์เซตของเซตว่างและเพาเวอร์เซตของ $\{\phi\}$

วิธีทำ $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ▮

หมายเหตุ ถ้าเซต S มีสมาชิกเท่ากับ n แล้ว เพาเวอร์เซตของเซต S จะมีค่าเท่ากับ 2^n ยกเว้น $P(\varnothing) = 2^0 = 1$

1.3.1 ผลคูณคาร์ทีเชียน

ผลคูณคาร์ทีเชียน (cartesian products) เป็นการกำหนดความสัมพันธ์ของการจัดคู่ความสัมพันธ์ของเซต 2 เซตโดยมีสมาชิกของเซตที่1 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ เรียงกัน ที่มี a_1เป็นสมาชิกตัวที่ 1 a_2 เป็นสมาชิกตัวที่ 2,….,a_n เป็นสมาชิกตัวที่ n และสมาชิกของเซตที่ 2$(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ จะเรียกว่าคู่ลำดับ (ordered pair) ของ A กับ B และ $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (b_1,b_2,\ldots,b_n) \leftrightarrow a_i = b_i$ โดยที่ $i := 1,2,3,\ldots,n$ ทางคอมพิวเตอร์ใช้พิจารณาความสัมพันธ์ของสมาชิกกับงาน 2 กลุ่ม

นิยามที่ 1.14 ผลคูณคาร์ทีเชียน ของเซต A และ B จะเป็นเซตของคู่ลำดับ (a,b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A, b \in B$ นั่นคือ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

ตัวอย่างที่ 1.18 ให้ A = {1,2} , B = {a,b,c}

วิธีทำ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$ ▌

ตัวอย่างที่ 1.19 จงหาว่า A X B = B X A หรือไม่

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.18 $B\times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

ซึ่ง $(a,1) \neq (1,a)$

$\therefore A \times B \neq B \times A$ ▌

นิยามที่ 1.15 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in A_i$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,n\}$

ตัวอย่างที่ 1.20 กำหนดให้เซต A = {0,1}, B = {1,2}, C= {0,1,2} หา A X BX C

วิธีทำ $A\times B\times C = \{(0,1,0),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),$
$(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\}$ ▌

ข้อสังเกต A X B = B X A เมื่อเซต A และเซต B มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

1.3.2 ตัวดำเนินการบนเซต

เซต 2 เซตที่นำมาประสมกันในทิศทางที่ต่างกัน ตัวอย่างเช่น กำหนดเซตของนักเรียนสาขาคอมพิวเตอร์ และเซตนักเรียนสาขาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง หากต้องการสร้างเซตนักเรียนใหม่ขึ้นที่ประกอบด้วยนักเรียนสาขาคอมพิวเตอร์หรือสาขาคณิตศาสตร์แล้ว พบว่าเซตนักเรียนใหม่อาจเป็นเซตของนักเรียนสาขาคอมพิวเตอร์และนักเรียนสาขาคณิตศาสตร์มารวมกัน หรืออาจเป็นเซตของนักเรียนสาขาคอมพิวเตอร์อย่างเดียว หรืออาจเป็นนักเรียนสาขาคณิตศาสตร์อย่างเดียวก็ได้ เป็นต้น จึงทำให้เกิดตัวดำเนินการบนเซตขึ้นประกอบด้วย ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง และส่วนเติมเต็ม

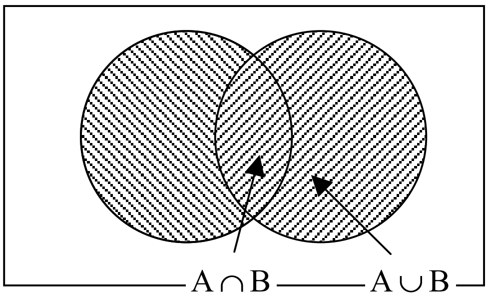
นิยามที่ 1.16 ยูเนียน (union) ของเซต A กับ B เขียน $A \cup B$ คือ

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของเซต A กับ B เขียน $A \cap B$ คือ

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

การยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน แสดงเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงการยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน

ตัวอย่างที่ 1.21 ถ้าเซต A = {1,3,5} และเซต B = {5,6,7}

วิธีทำ $A \cup B = \{1,3,5,6,7\}$

$A \cap B = \{5\}$ ซึ่งไม่เท่ากับ $\varnothing$

$\therefore$ A และ B เป็นเซตที่มีตัวร่วม ▌

นิยามที่ 1.17 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

นิยามที่ 1.18 ผลต่าง (difference) ของเซต A กับ B เขียนอยู่ในรูปแบบสัญลักษณ์ A−B คือ

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซต A เขียนอยู่ในรูปแบบสัญลักษณ์ $\overline{A}$ คือ

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

1.3.3 **คุณสมบัติของเซต**

เซตถูกนำไปใช้แก้ปัญหาในวิธีการที่แตกต่างกันได้ตามคุณสมบัติของเซตที่ได้รับการพิสูจน์แล้วดังตารางที่ 1.10

ตารางที่ 1.10 คุณสมบัติของเซต

สัญลักษณ์	ชื่อ
$A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$	กฎเอกลักษณ์ (identity laws)
$A \cap U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	กฎการครอบงำ (domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	กฎการกระทำเอง (idempotent laws)
$(\overline{\overline{A}}) = A$	กฎส่วนเติมเต็ม (complementation laws)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	กฎการสลับที่ (commutative laws)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	กฎการจัดหมู่ (associative laws)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	กฎการกระจาย (distributive laws)
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	กฎของเดอมอแกน (De morgan 's laws)

ตัวอย่างที่ 1.22 จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

วิธีทำ $\overline{A \cap B} = \{x | x \notin A \cap B\}$

$= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\}$

$= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$

$= \{x | x \notin A \vee x \notin B\}$

$= \{x | x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$

$= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$ ▌

ตัวอย่างที่ 1.23 จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

วิธีทำ $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B \cap C})$ กฎของเดอมอแกน ข้อ 1

$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ กฎของเดอมอแกน ข้อ 2

$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$ กฎการสลับที่

$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ กฎการสลับที่ ▌

1.3.4 **ยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน**

ยูเนียนคือศูนย์รวมข้อมูลของเซตที่บรรจุทุก ๆ ค่าข้อมูลที่เป็นสมาชิกอย่างน้อย 1 เซตเสมอ สามารถนำเสนอได้ดังสมการต่อไปนี้

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

อินเตอร์เซกชัน คือศูนย์รวมข้อมูลของเซตที่บรรจุค่าข้อมูลที่เป็นสมาชิกของทุกเซตเท่านั้น สามารถนำเสนอได้ดังสมการต่อไปนี้

$$A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ตัวอย่างที่ 1.24 ให้ $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ จงหา

วิธีทำ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1,2,3,\ldots.\},$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\},$ ▮

1.3.5 การแทนเซตในคอมพิวเตอร์

เพื่อความรวดเร็วในการดำเนินการบนเซต ในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ เพื่อประหยัดเนื้อที่ในการเก็บ จะใช้สายของบิตในการแทนสมาชิกของเซต

ตัวอย่างที่ 1.25 $\bigcup = \{1,2,3,4,5\}$

วิธีทำ $A = \{3,4\}$ จะแทน A ด้วย 00110

$B = \{1,2,3\}$ จะแทน B ด้วย 11100

$A \cap B$ จะแทนด้วย 00100

$A \cup B$ จะแทนด้วย 11110

$\overline{A}$ จะแทนด้วย 11001 ▮

1.3.6 ฟัซซีเซต

ฟัซซีเซต (fuzzy set) หมายถึงเซตที่แต่ละสมาชิกจะมีค่าของการเป็นสมาชิก (degree of membership) ระหว่าง 0 กับ 1 (0 = ไม่เป็นสมาชิก,1 = เป็นสมาชิก 100%) การแทนค่าของ ฟัซซีเซตจะใช้วิธีแจกแจงทุกสมาชิกพร้อมทั้งค่าของการเป็นสมาชิกเฉพาะที่มากกว่า 0)

ตัวอย่างที่ 1.26 $F =$ เซตของคนมีชื่อเสียง $=\{$0.9 ชวน,0.8 ทักษิณ,0.5 ชวลิต$\}$

$R =$ เซตของคนรวย $=\{$0.9 บรรหาร,0.8 ทักษิณ,0.5 ชวลิต$\}$

วิธีทำ $\overline{F} = \left\{\frac{0.1}{(1-0.9)}\text{ชวน}, \frac{0.4}{(1.06)}\text{ทักษิณ}, \frac{0.3}{(1-0.3)}\text{ชวลิต}\right\}$

$F \cup R = \{$0.9 ชวน,0.9 บรรหาร,0.8 ทักษิณ,0.5 ชวลิต$\}$

$F \cap R = \{$0.6 ทักษิณ,0.3 ชวลิต$\}$ ▮

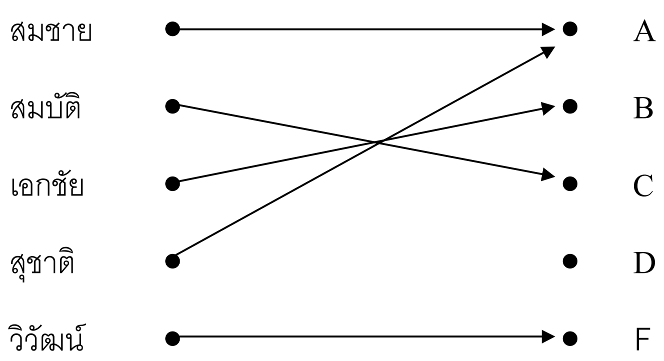
1.4 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นแนวคิดที่สำคัญของดิสครีต เพราะฟังก์ชันถูกใช้ในการนิยามโครงสร้าง-ดิสคริตที่เกี่ยวกับอันดับและสายอักขระ นอกจากนั้นฟังก์ชันยังถูกนำไปใช้แก้ปัญหาในระบบคอมพิวเตอร์ จนทำให้เกิดฟังก์ชันการเวียนเกิดขึ้น ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้แก้ปัญหาหนึ่ง ๆ ได้จริงตามศาสตร์วิทยาการคอมพิวเตอร์ ดังตัวอย่างเช่น การส่งผลการเรียนในรายวิชาดิสคริตให้แก่นักเรียนโดยกำหนดกลุ่มข้อมูล 2 เซต คือ เซตเกรด {A, B, C, D, F} และเซตนักเรียน {สมชาย, สมบัติ, เอกชัย, สุชาติ, วิวัฒน์} โดยประเมินได้ดังนี้ สมชายได้เกรด A สมบัติได้เกรด C เอกชัยได้เกรด B สุชาติได้เกรด A และวิวัฒน์ได้เกรด F ซึ่งผลการเรียนดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 1.3

นิยามที่ 1.19 ฟังก์ชัน fจากเซต Aไป เซต B จะเป็นการกำหนดค่าของสมาชิกที่ไม่มีการซ้ำ ของ B สำหรับแต่ละสมาชิกของ Aเขียนแทนด้วย

$f: A \longrightarrow B$

$f(a) = b$ เมื่อ $b \in B$ ที่ไม้ซ้ำถูกกำหนดความสัมพันธ์ให้ทุก $a \in A$



รูปที่ 1.3 แสดงเกรดวิชาดิสครีตในชั้นเรียน

นิยามที่ 1.20 f : A⟶B จะเรียกว่าเป็นโดเมน (domain) ของ f และ B จะเรียกว่าโคโดเมน (codomain) ของ f

f(a) = b จะเรียก bว่าเป็นจินตภาพ (image) ของ a

เซตของจินตภาพทั้งหมดที่ $a \in A$ จะเรียกว่า เรนจ์ (range) ของ f

ตัวอย่างที่ 1.27 f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้ 2 บิตสุดท้ายของสายของบิตที่ยาว ≥ 2 กับสายของบิตหนึ่ง ๆ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

วิธีทำ โดเมน ={ทุกสายของบิตที่ยาว ≥ 2 }

เรนจ์ = {00,01,10,11} ∎

ตัวอย่างที่ 1.28 $f:Z \rightarrow Z$ กำหนด $f(x) = x^2$

วิธีทำ โดเมน = {เลขจำนวนเต็มทุกตัว}

โคโดเมน = {เลขจำนวนเต็มทุกตัว}

เรนจ์ = {เลขที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบที่เป็นผลลัพธ์ของกำลัง 2 สมบูรณ์}

={0,1,4,9} ∎

นิยามที่ 1.21 ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชัน จาก $A \rightarrow R$, $f_1 + f_2$ และ $f_1 f_2$ กำหนดดังนี้

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

ฟังก์ชันจะบวกและคูณกันได้ต้องมีโดเมนเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 1.29 f_1 f_2 เป็นฟังก์ชัน $R \rightarrow R$ $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x - x^2$

วิธีทำ $(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 - (x - x^2) = x$

$(f_1.f_2)(x) = f_1(x).\ f_2(x) = x^2.(x - x^2) = x^3 - x^4$ ∎

นิยามที่ 1.22 $f:A \rightarrow B$, $S \subseteq A$ image ของ $S \subseteq B$ เขียน f(s)

$$f(s) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

ตัวอย่างที่ 2.30 กำหนดให้ A={a,b,c}, B ={1,2,3,4}, f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4

วิธีทำ จินตภาพของ s = {b,c} = {1,4} ∎

นิยามที่ 1.23 f จะเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง หรืออินจังทีพ (injuctive) ก็ต่อเมื่อ ถ้า f(x) = f(y) สำหรับทุก ๆ $x,y \in$ โดเมน

ตัวอย่างที่ 1.31 จงหาว่า $f(x) = x^2$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ ไม่เป็นเพราะ $f(1) = f(-1) = 1$ แต่ $1 \neq -1$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.32 จงหาว่า $f(x) = x+1$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ $x+1 \neq y+1$ เมื่อ $x \neq y$

$\therefore f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ▮

นิยามที่ 1.24 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างแท้จริง (strictly increasing) ถ้า $f(x) < f(y)$ เมื่อ $x<y$

f เป็นฟังก์ชันลดลงอย่างแท้จริง (strictly decreasing) ถ้า $f(x) > f(y)$ เมื่อ $x<y$

นิยามที่ 1.25 $f:A \to B$ จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันจาก a ทั่วถึง (onto) b หรือซับเจคทีพ (subjective) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $b \in B$ จะมี $a \in A$ ซึ่ง $f(a)=b$

ตัวอย่างที่ 1.33 $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงของ $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$

วิธีทำ เพราะ $3 \in \mathrm{I}$ แต่ไม่มี $x \in \mathrm{I}$ ซึ่ง $x^2 = 3$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.34 $f(x) = x + 1$ เป็น $f: \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ เป็น ฟังก์ชันทั่วถึง

วิธีทำ เพราะ $\forall y \in \mathrm{I}$ จะมี $x = y - 1$ ซึ่ง $y = x + 1$ ▮

นิยามที่ 1.26 f เป็นฟังก์ชันสมนัย (correspondence) หนึ่งต่อหนึ่งหรือไบเจคชัน (bijection) ถ้า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

ตัวอย่างที่ 1.35 $f : A \to A$ โดยที่ $f_A(x) = x$ จะถือว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึงนั่น คือเป็นไบเจคชัน ▮

1.4.1 ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

นิยามที่ 1.27 $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันผกผันหนึ่งต่อหนึ่งที่สมนัยของ f จะเป็น f ซึ่ง f(a) = b เขียนแทนด้วย f^{-1} และจะสามารถหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งต่อหนึ่งแบบสมนัย

ตัวอย่างที่ 1.36 $f:\{a,b,c\} \rightarrow \{1,2,3\}$ โดยที่ f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1

วิธีทำ f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore$ f สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้โดย

$f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = b$ ∎

ตัวอย่างที่ 1.37 $f: \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I}$ โดยที่ f(x) = x+1 สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้เท่าไร

วิธีทำ f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore$ สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้โดย

$f(x) = y = x+1$

$x = y-1$

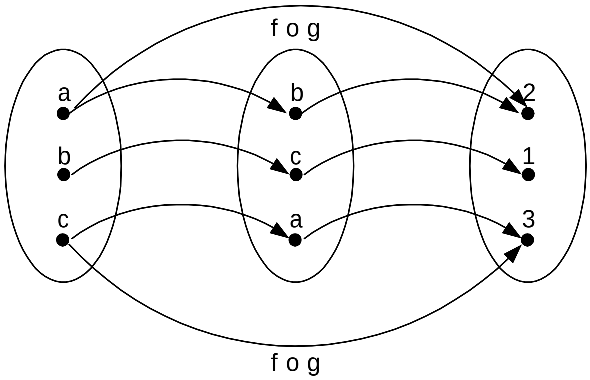
$f^{-1}(y) = y-1$ ∎

ตัวอย่างที่ 1.38 $f:Z \rightarrow Z$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่

วิธีทำ เพราะ f(-1) = f(1) = 1 $\therefore$ ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore f$ ไม่สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้ ∎

นิยามที่ 1.28 $g: A \rightarrow B$ และ $f: B \rightarrow C$ ส่วนประกอบดังกล่าวของ f และ g เขียนแทนด้วย fog หมายถึง (fog)(a) = f(g(a)) ซึ่ง fog จะเป็นฟังก์ชัน ถ้าเรนจ์ของ g เป็นสับเซตของโดเมนของ fดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 องค์ประกอบของฟังก์ชัน f และ g

ที่มา(Rosen, 1995, p.66)

ตัวอย่างที่ 1.39 f และ g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ กำหนดโดย

$f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x + 2$

จงหา fog และ gof

วิธีทำ (fog)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7

(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11

$\therefore$ fog $\neq$ gof ▌

1.4.2 **กราฟของฟังก์ชัน**

กราฟของฟังก์ชัน (graph of function) คือความสัมพันธ์ของเซตคู่ลำดับของ A และ B เขียนผ่านฟังก์ชัน A X B ซึ่งเซตที่เกิดจากคู่ลำดับนี้ ใช้เส้นทางแสดงความสัมพันธ์เพื่อให้เห็นถึงพฤติกรรมของฟังก์ชัน

นิยามที่ 1.29 กราฟของฟังก์ชัน f:A⟶B เป็นเซตของคู่ลำดับที่ {(a,b) | a∈ A ∧ f(a) = b} คือกราฟของความสัมพันธ์ ซึ่ง {a, f(a) | a เป็นโดเมนของ f } กราฟของฟังก์ชัน f เป็นเซตของทุก ๆ จุด p(a,b) ใด ๆ ในระนาบพิกัด ซึ่ง b = f(a), เมื่อ a เป็นโดเมนของ f ดังนั้น กราฟของ f จึงเหมือนกับกราฟของสมการ b = f(a) ถ้า P(a,b) อยู่บนกราฟ f ดังนั้นจุดพิกัดของ P ก็คือค่าของ f(a)

หลักการเขียนกราฟของฟังก์ชัน

(1) สมมติค่า a (ซึ่งเป็นโดเมนของ f) และหาค่า b ตามฟังก์ชัน f แล้วเขียนค่า a,b ลงในตาราง

(2) พล็อตจุดพิกัด (a,b) ลงในระนาบพิกัด ซึ่งมีแกน a เป็นแกนนอน และแกน b เป็นแกนตั้ง

(3) โยงจุดต่าง ๆ ต่อเนื่องกันจากซ้ายไปขวา (ศึกษาจากตัวอย่างที่ 1.40)

ตัวอย่างที่ 1.40 ให้ $f = \{ (a,b) \mid a > 2$ และ $b = a^2\}$

วิธีทำ จะได้ว่า

(1) f เป็น ฟังก์ชัน เพราะ ถ้า $(a,b_1) \in f$ และ $(a,b_2) \in f$ แล้ว $b_1 = a^2$ และ $b_2 = a^2$ ดังนั้น $b_1 = b_2$ (นั่นคือ ค่า a หนึ่งค่าจะให้ค่า b เพียงค่าเดียว)

(2) โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่า 2

เขียนแทนด้วย $D_f = \{a \mid a > 2\}$

(3) เรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่า 4

เขียนแทนด้วย $R_f = \{y \mid y > 4\}$

หมายเหตุ จาก $b = a^2$ และ $a > 2$

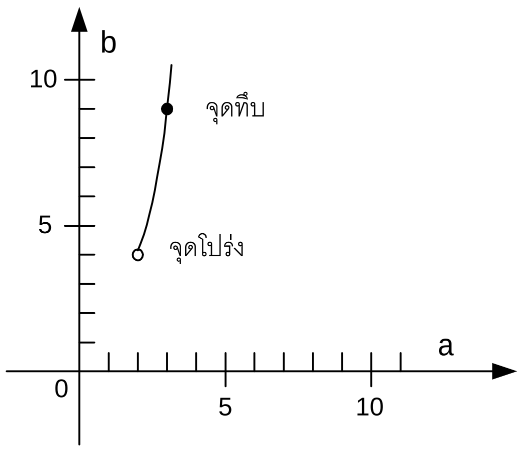
เมื่อแทนค่า a ก็ได้จะ $b > (2)^2 \rightarrow b > 4$

(4) เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

a	2	3
b	4	9

หมายเหตุ สมมติว่า a = 2 และได้ b = 4 แต่ไม่ใช้ค่านี้ เนื่องจาก $a \neq 2$ ถ้า $a > 2$ จึงใช้จุดโปร่งพล็อตลงที่จุดนี้ ค่าที่เป็นไปตาม f นี้ คือ $a > 2$ และ b > เรนจ์ ดังกราฟรูปที่ 1.5

(5) $f = \{ (a,b) \mid a > 2$ และ $b > a^2 \}$ อาจเขียนแทนว่า $f : f(a) = a^2, a > 2$ ▌



รูปที่ 1.5 กราฟของฟังชัน $f = \{ (a,b) \mid a > 2$ และ $b = a^2 \}$

1.4.3 **ฟังก์ชันปัดเศษลง และฟังก์ชันปัดเศษขึ้น**

ฟังก์ชันที่มีความสำคัญในหลักการของดิสครีตคือ ฟังก์ชันปัดเศษลง และฟังก์ชันปัดเศษขึ้น ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้มักถูกใช้บ่อยครั้งเมื่อต้องการนับจำนวนวัตถุ โดยมีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์ตามขั้นตอนของการแก้ปัญหาโดยเฉพาะเรื่องขนาดข้อมูลที่มีเลยเป็นทศนิยม

นิยามที่ 1.30 ฟังก์ชันปัดเศษลง (floor function) ของ x หมายถึงเลขจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ $\leq x$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f(x) = \lfloor x \rfloor$

ฟังก์ชันปัดเศษขึ้น (ceiling function) ของ x หมายถึงเลขจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ $\geq x$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f(x) = \lceil x \rceil$

ตัวอย่างที่ 1.41 จงหาค่าฟังก์ชันปัดเศษลงและฟังก์ชันปัดเศษขึ้น จากค่าข้อมูลต่อไปนี้

วิธีทำ

(1) $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$, $\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$

(2) $\lfloor 1.8 \rfloor = 1$, $\lceil 1.8 \rceil = 2$

(3) $\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1$, $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$ ▮

1.5 อันดับและการหาผลรวม

อันดับถูกใช้นำเสนอคู่ลำดับของข้อมูล และนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายทางในดิสครีต นอกจากนั้นยังมักนำมาแก้ปัญหาในการนับ ซึ่งมีความสำคัญในด้านโครงสร้างข้อมูลในศาสตร์ทางวิทยาการคอมพิวเตอร์ จึงเป็นหลักการสำคัญที่ถูกนำมาใช้ในฟังก์ชัน

1.5.1 อันดับ

อันดับในศาสตร์ทางวิทยาการคอมพิวเตอร์ใช้ในการแทนสายของบิตหรือสายของตัวอักษร มักเขียนอยู่ในรูปแบบ $a_1, a_2, ... a_n$

นิยามที่ 1.31 อันดับ (sequence) เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของเลขจำนวนเต็มไปยังเซตของ S จะใช้ a_n แทน image ของเลขจำนวนเต็ม n

a_n = เทอมของอันดับ

$\{a_n\}$ = อันดับ

ตัวอย่างที่ 1.42 พิจารณาอันดับ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = 1/n$

วิธีทำ $\therefore$ อันดับของ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ คือ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ▮

ตัวอย่างที่ 1.43 จงหาสมาชิกของอันดับ $c_n = 5^n$

วิธีทำ $\therefore$ อันดับของสมาชิก $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$

คืออันดับจำกัดที่อยู่ในรูปแบบ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$

ซึ่งเท่ากับ 1,5,25,…. $\blacksquare$

1.5.2 **การหาผลรวม**

จากอันดับ $\{a_n\}$จะหาผลรวมในเทอมของ $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots, a_n$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

ตัวอย่างที่ 1.44 จงหาค่าผลรวมของ $\sum\limits_{j=1}^{5} j^2$

วิธีทำ $\sum\limits_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$= 1+4+9+16+25$

$= 55$ $\blacksquare$

ตัวอย่างที่ 1.45 จงหาค่าผลรวมของ $\sum\limits_{k=4}^{8} (-1)^k$

วิธีทำ $\sum\limits_{k=4}^{8} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8$

$= 1+(-1)+1+(-1)+1$

$= 1$ $\blacksquare$

ตัวอย่างที่ 1.46 จงหาค่าผลรวมของอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{j=0}^{n} ar^{j}$

วิธีทำ

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^{j}$$

$$rS = r\sum_{j=0}^{n} ar^{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} + a - a$$

$$= \sum_{j=0}^{n} ar^{j} + (ar^{n+1} - a)$$

$$= S + (ar^{n+1} - a)$$

กรณีที่ $r \neq 1$

$$S = \frac{(ar^{n+1} - a)}{r - 1}$$

▮

1.6 สัญลักษณ์โอใหญ่

ในการคิดขั้นตอนวิธีในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการแก้ไขปัญหาต่าง ๆ สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งที่จะต้องพิจารณาคือเวลาที่คอมพิวเตอร์ใช้ในการประมวลผล ในการวิเคราะห์ปัญหานั้น ๆ การวิเคราะห์ การเติบโตของฟังก์ชันจะเกี่ยวข้องโดยตรงกับปัญหาดังกล่าว

สัญลักษณ์โอใหญ่ (big O notation) เป็นเครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์แนวโน้มในการใช้เวลาในการประมวลผล โดยใช้การเติบโตของฟังก์ชันที่นำมาประมวลผล มีการจัดรูปแบบของฟังก์ชันที่ผู้ใช้นำมาใช้ให้สอดคล้องกับฟังก์ชันกลางที่สามารถนำมาวัดค่าการเติบโตเพื่อวัดความเร็วในการประมวลผล หากเติบโตมากจะใช้เวลามาก และตรงข้ามถ้าเติบโตน้อยจะใช้เวลาสั้นกว่า

นิยามที่ 1.32 f และ g เป็นฟังก์ชันจากจำนวนเต็ม หรือจำนวนจริง

$f(x)=O(g(x))$ ถ้ามีค่าคงที่ C และ k ซึ่ง

$|f(x)| \leq C|g(x)| \rightarrow$ เมื่อ $x > k$

f(x) เป็น big – o ของ g(x)

ตัวอย่างที่ 1.47 จงแสดงค่า $f(x) = x^2 + 2x + 1$ เป็น $O(x^2)$ เมื่อ $x > 1$

วิธีทำ จะได้ $0 \leq x^2+2x+1 \leq x^2+2x^2+x^2 = 4x^2$

นั่นคือ $f(x) = O(x^2)$, C=4, k = 1

เมื่อ $x>2$ จะได้ $0 \leq x^2+2x+1 \leq x^2+x^2+x^2 = 3x^2$

(เพราะ $2x \leq x^2$ เสมอ)

นั่นคือ $f(x) = O(x^2)$, C=3, k=2 ▌

หมายเหตุ ในการแสดง $f(x) = O(g(x))$ เพียงแต่หา C และ k คู่เดียวที่มีคุณสมบัติ $|f(x)| \leq C|g(x)|$ เมื่อ $x > k$ (Johnsonbaugh,1984, p.29)

ตัวอย่างที่ 1.48 จงแสดงว่า $7x^2$ เป็น $O(x^3)$

วิธีทำ พิจารณา $7x^2 < x^3$ เมื่อ $x > 7$

นั่นคือ $7x^2$ เป็น $O(x^3)$ C=1, k=7 ▌

ตัวอย่างที่ 1.49 จงพิสูจน์ว่า x^3 เป็น big-o $O(7x^2)$

วิธีทำ ต้องหา C,k ซึ่ง $x^3 \leq C(7x^2)$ เมื่อ $x > k$

นั่นคือ $x \leq 7C$

ไม่มี C ที่มีคุณสมบัติ ดังกล่าว เพราะ x อาจจะมีขนาดใหญ่มาก

$\therefore$ x^3 ไม่เป็น $O(7x^2)$ ▌

1.7 สรุป

ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่องตรรกศาสตร์ เซต และฟังก์ชัน เป็นสิ่งที่จะนำมาใช้ประกอบการศึกษาทฤษฎีทางด้านการคณนา (computation) ซึ่งเป็นหลักในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ เนื่องจากเครื่องคอมพิวเตอร์มีหน่วยที่ใช้ในการเปรียบเทียบเชิงตรรก (logic unit) บรรจุอยู่ การที่จะสามารถเขียนโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์ได้ดีผู้เรียนควรจะวิเคราะห์โจทย์ เลือกตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ พิจารณาส่วนที่เกี่ยวข้องแยกแยะและตัดส่วนที่ไม่เกี่ยวข้องออกไป รวมไปถึงการกำหนดความความสัมพันธ์ในลักษณะพื้นฐานคืออยู่ในรูปแบบของคู่ลำดับ ซึ่งจะทำให้ ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น

1.8 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่าความเป็นจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   1.1 $3 + 3 = 6$ และ $1 + 2 = 5$

   1.2 ไม่จริงที่ว่า $3 + 3 = 6$ หรือ $1 + 2 = 5$

   1.3 เป็นความจริงที่ว่า $2 + 2 \neq 4$ และ $1 + 2 = 3$

   1.4 ไม่จริงที่ว่า $3 + 3 \neq 6$ หรือ $1 + 2 \neq 5$

   1.5 ถ้า $5 < 3$ แล้ว $-3 < -5$

   1.6 ไม่จริงที่ $1 + 1 = 2$ ก็ต่อเมื่อ $3 + 4 = 5$

   1.7 เหตุที่ $1 + 2 = 3$ เนื่องมาจาก $4 + 4 = 4$

   1.8 ไม่จริงที่ $1 + 1 = 5$ เมื่อ $3 + 3 = 1$

   1.9 ถ้า $3 < 5$ แล้ว $-3 < -5$

   1.10 ถ้า $1 + 2 = 3$ แล้ว $4 + 4 = 4$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีการดูดซับของ $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

3. ใช้วิธีพีชคณิตของเซต พิสูจน์ข้อต่อไปนี้

   3.1 $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

   3.2 $A \cap (B - A) = \varnothing$

   3.3 $A \cup (B - A) = A \cup B$

   3.4 $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

   3.5 $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing$

   3.6 $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

4. จงแสดงว่า $\sim[(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim \mathbf{q})] \equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim \mathbf{q})$

5. ให้ A, B, C เป็นเซตใน U จงพิจารณาว่าข้อใดถูก

   5.1 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   5.2 $(A \cup B)' \cup C = A' \cap B' \cap C$

   5.3 $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

   5.4 $B \cap (A \cup C) = (C \cup A) \cap B$

   5.5 $(A \cup B)' = A \cap B$

6. จงพิจารณาข้อต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่

   6.1 $\forall x\,[\,A(x) \rightarrow B(x)\,]$

   6.2 $A_A \subset A_B$

   6.3 $\forall x\,[\,C(x) \rightarrow B(x)\,]$

   6.4 $A_C \subset A_B$

7. เขียนโปรแกรมเพื่อรับสายตัวอักษร 2 ตัวความยาวเท่ากับ 10 แล้วหาผลลัพธ์ของ AND OR XOR ของสายอักษร 2 ตัวนี้

8. เขียนโปรแกรมเพื่อหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิต n+1 โดยพจน์แรกคือ $\sum_{j=0}^{n} ar^j$ สามารถรับค่าของ n, a และ r ได้

9. เขียนโปรแกรมเพื่อหาผลคูณของ

   $$\prod_{j=0}^{n} j! = 0!\,1!\,2!\ldots n!$$

   ค่า n กำหนดจากค่าที่รับมาได้

10. จงหาค่าโอใหญ่ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   10.1 $f(x) = 1 + 2 + \ldots.\, n \qquad = O(n^2)$

   10.2 $f(x) = n! \qquad = O(n^n)$

   10.3 $f(x) = \log n! \qquad = 0O(n \log n)$

   10.4 $f(x) = n \qquad = O(2^n)$

   10.5 $f(x) = \log n \qquad = O(n)$

เอกสารอ้างอิง

Johnsonbaugh, Richard, Date. (1984). **Discrete mathematics.** NY: Macmillan Publishing.

Rosen Kenneth H. (1995). **Discrete mathematics and its application** (3rd ed). Singapore: McGraw-Hill.